Estas oscilaciones no sorprenden, y mucho menos «escandalizan». Si bien la interpretación algebraico-operativa de Marx de la relación diferencial es la que hoy nos parece más convincente (y nos ayuda más, técnica y filosóficamente), cometeríamos un grave error si consideráramos cancelada, definitivamente aclarada, la dialéctica discreto-continuo, quanto-infinitésimo, que ha preocupado a la ciencia y a la filosofía durante milenios, y que sigue desarrollándose con fórmulas siempre nuevas.

Una última consideración, de carácter más general. Los *Manuscritos matemáticos* de Marx nos ofrecen una indicación metodológica muy válida sobre la relación ciencia-filosofía. Está claro que Marx no «jugaba» con las matemáticas; en las cartas sobre las diferenciales aparece también el problema egipcio o problemas de economía política. Consideraba esencial avanzar en profundidad en la cuestión de la *fundación* del cálculo diferencial, porque intuía que allí estaba el camino para aclarar la ley (generalísima) de la «negación de la negación», para «pensar mejor», no sólo localmente sino también globalmente. La superación de la barrera entre las dos culturas no puede y no *debe* ser un enciclopedismo (o imposible o inútil), sino la plena comprensión de los *fundamentos* de los diferentes métodos y trayectorias de investigación, para una recíproca fecundación de las diferentes, pero no divergentes, «vías de pensamiento».

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
ACADEMIA DE MATEMATICAS
PLANTEL ORIENTE

MANUSCRITOS MATEMATICOS

CARLOS MARX

En Conmemoracion del Centenario de su Muerte

INDICE

NOTA DE LOS EDITORES

Queremos con este folleto rendir un sencillo homenaje a la memoria de Carlos Marx en el año del centenario de su muerte.

Presentamos dos manuscritos matemáticos de Marx. La "Conclusión" del segundo manuscrito, hasta donde sabemos, es publicada aquí por primera vez en español.[a]

Agradecemos a Guillermo Gómez Alcaráz, profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM su traducción de los manuscritos de Marx aquí presentados.

También agradecemos a Jorge Veraza Urtuzuástegui, Coordinador del Seminario de El Capital de la Facultad de Economía de la UNAM, la "Presentación" y la "Introducción" escritas especialmente para esta edición.

Además publicamos dos escritos referidos a los manuscritos matemáticos de Marx:

1) "Marx y las matemáticas" del matemático holandés Dirk J. Struik[b], tomado de la revista "Críticas de la Economía Política" (edición latinoamericana) No. 18/19. Méx. enero-junio 1981.

2) "De los Manuscritos matemáticos de K. Marx". de Lucio Lombardo Radice; publicado en el libro Cartas sobre las ciencias de la naturaleza y las matemáticas. (a)

COMITE DE CONMEMORACION DEL CENTENARIO DE LA MUERTE DE MARX.
CCH. ORIENTE. Noviembre 1983.

(a) Los manuscritos de Marx aquí referidos se encuentran publicados, sin la "Conclusión" y sin notas a pie de página como apéndices de Cartas sobre las ciencias de la naturaleza y las matemáticas. K. Marx y F. Engels. Ed. Anagrama. Barcelona, 1975, en una traducción del francés que consideramos no del todo afortunada.

(b) De este autor puede consultarse en español su obra: Historia Concisa de las Matemáticas. Ed. IPN. Méx. 1980.

PRESENTACION

Desde el prólogo a la segunda edición del "Anti Düring" (1885) escrito por Engels, se tiene noticias de que entre los manuscritos de Mar había algunos de contenido matemático, a los cuales Engels les confería u gran valor y deseaba publicar.

Los manuscritos matemáticos de Carlos Marx están dedicados a esclarecer la esencia del Cálculo Diferencial. Constituyen aproximadamente 1000 páginas, y la explicación que nos propone respecto de los conceptos fundamentales y métodos del Cálculo Diferencial permite en la actualidad, explicar científicamente la naturaleza dialéctica del cálculo simbólico d la matemática y de la lógica matemática.

La exposición de Marx es muy clara, y en cuanto al aspecto algebraico no presenta mayor dificultad para el lector corriente, pues nociones elementales de Cálculo Diferencial le serán suficientes. No obstante, requiere una introducción por dos motivos. El primero, meramente técnico resuelto en notas a pie de página por los editores rusos, atañe a la dive sa terminología matemática usada en el siglo XIX. Sin embargo esta difere cia es casi deleznable; pudiera causar dificultad sólo a aquellos que ya conozcan bien la actual terminología matemática -lo que no es el caso del lector corriente- y al mismo tiempo estén tan acostumbrados a ella que no puedan ponerla entre paréntesis un momento, siquiera en vista de reflexio narla comparándola con una análoga. Por lo demás, buena parte de la dificultad queda salvada pues el propio Marx va generando una nueva terminolo gía en el curso de su original demostración, de suerte que es comprensibl sin mayor problema en conexión con ella. Por cierto, esta producción de nueva notación constituye el centro nodal que estructura formalmente los manuscritos.

La versión castellana que hoy presentamos es traducción de una parte -sólo dos manuscritos sobre la noción de derivada- de la edición bilingue alemán-ruso (cuyo título original es "Matematicheskie Rukopisi", Nauka , M. 1968) y estuvo a cargo de Yanovskaya S.A., Rubkin A.Z., Rybnikov K.A. con recomendaciones de Kolmogorov A.N. y Petrovskii I.G.. Incluye por primera vez todos los textos de trabajos de Marx que presentan sus aspectos más terminados, así como sus propias anotaciones en apuntes y transcripciones. Así mismo contiene, -según adelantaremos-, comentarios y observaciones de carácter matemático, histórico y de fuentes bibliográficas que la hace accesible a un círculo muy amplio de lectores.

En el 50 aniversario de la muerte de Marx (1933) una parte de tales manuscritos fue publicada en ruso: "Bajo la bandera del Marxismo" 1933 No. 1, 15-73 y en "El Marxismo y las Ciencias Naturales" 1933, 5-61.

La referida edición bilingue (de 1968) está dividida en dos partes. En la primera parte están concentrados los trabajos propios de Marx.- En la segunda se da la relación completa de todos sus apuntes y transcripciones de contenido matemático, En efecto, para una cabal comprensión de las ideas de Marx respecto de sus apuntes y más aún de las citas textuales de otros autores, frecuentemente es necesario conocer la literatura matemática por él resumida para tener una imagen más cabal de sus ideas. Por ello tal imagen sólo la da el libro en su conjunto. Sin embargo, en éste el centésimo aniversario de su muerte, queremos mostrar un botón que propicie el interés por tales manuscritos.

La segunda dificultad es más honda y propiamente historico-teórica, presenta, a su vez, dos aspectos que se complementan, potenciándola. Atañe a los malos entendidos que el discurso de Marx ha sufrido en lo que va del siglo XX. La "feria de las interpretaciones" que enmaraña un discurso de suyo fresco y desenvuelto también se ha apoltronado en sus manuscritos matemáticos. Esto si que amerita una introducción que busque desbrozar la maraña para abrirnos paso hasta los ensayos que hoy publicamos. Cuya dificultad es más bien que matemática, filosófica -he aquí el segundo aspecto de la dificultad que comentamos- y ha sido base de renovada y particular malinterpretación/malversación.

De hecho, la dificultad inherente al texto ameritaría un breve comentario final y/o paralelo pues fácilmente avanza el lector a través de ella. Pero enganchada como está con la breña interpretativa que desde el exterior recae sobre el texto redobla la necesidad de una introducción, así sea breve.

Por lo dicho, cabe también que el lector hiciera a un lado, sin más, todo ese farrago de malentendidos y se internara directamente en el escrito de Marx; si después quisiera leer nuestra introducción -y otras- nuestro diálogo podría también ser fructífero.

A MODO DE INTRODUCCION.

A partir de la década de los 50s vemos a Marx exiliado en Inglaterra estudiando Matemáticas durante sus convalescencias. El interés de Marx hacia la matemática no surgió sólo ante necesidades que le planteó la elaboración de su obra El Capital, pero es en relación a la crítica de la economía tanto en su contenido como en su método que se aviva un interés previo y más general por el tema.

Así, por citar sólo un ejemplo: en el análisis de las crisis, Marx intentó varias veces calcular las "alzas y bajas" como "curvas irregulares", de suerte que pudieran "determinarse matemáticamente, partiendo de ahí [sus] leyes esenciales". Y le comunica su intención en 1873 a Samuel Moore su mejor asesor en matemáticas -aunque de modestos conocimientos. La referencia espistolar entre ambos muestra que éste consideró que tal descripción era "irrealizable por el momento", así, Marx decide "renunciar a ello [también] por el momento"*.

Ahora bien, sabemos que en 1878 el estudio de la matemática empezó a tener en Marx un carácter sistemático. Basó sus estudios matemáticos en textos usados en la Universidad de Cambridge y textos conocidos de la época como el de Sauri, Boucharlat, Euler, Mc Laurin, Lacroix, Hind, Hall y otros (IMEL). Es digno de recordarse que en el continente europeo durante los 70s del siglo pasado se estaba fraguando el análisis clásico contemporáneo, antes que nada en los trabajos de Dedekind, Cantor y Weierstrass y sobre todo con la teoría de los números reales y límite. Pero Marx en esa época no hubiera encontrado en todo el Reino Unido personas enteradas ni mucho menos entusiastas de los trabajos matemáticos que se realizaban en el continente (cfr. Introducción de IMEL**).

---

*Carta de Marx a Engels del 31 de mayo de 1873. Subrayémoslo, pues ha sido ocasión de graves confusiones: "determinar matemáticamente" las leyes esenciales de las crisis no es lo mismo que "deducir" matemáticamente éstas como algunos han creido, muy dentro de la moda abierta por los neoclásicos de matematizar las apariencias. Marx ha construido conceptualmente estas leyes y ahora lo que busca es su precisión cuantitativo funcional.
**Así por ejemplo IMEL refiere: "En las universidades inglesas, estos trabajos de los matemáticos continentales [Dedekind, etc.] eran prácticamente desconocidos (...) No es sorprendente, por tanto, que Marx en sus manuscritos matemáticos, no prestase atención a esos problemas -más modernos- refe-

Aunque al margen de estos desarrollos las ideas de Marx acerca de la esencia del cálculo diferencial simbólico representan aún hoy gran interés porque buscan explicar: a) otros aspectos no resueltos sino por b) en los asuntos que discrepa con la actualidad bien podemos encontrar más de rica reflexión para desarrollar lo que hoy se tiene por definitivo hay que decir que c) en muchos aspectos son cercanos sus desarrollos, así como sus preguntas, con los actuales, según el lector puede documentarse en el ensayo de D. Struik*(£), en la Introducción del IMEL** o en la de Luci Lombardo Radice de la edición italiana***(£).

En efecto, Marx se propone explicar cuál es la esencia dialéct ca del cálculo simbólico que opera con el símbolo de la diferencial. Objet vo que de ningún modo se ha propuesto la matemática actual y que rebasa con mucho el ámbito de la mera crítica de la economía política aunque con tituya un aspecto esencial para su composición metódica y temática.

---

rentes al análisis matemático en vías de elaboración en aquella época en el continente". Lo cual tenía su origen ya en tiempos pasados: "Es conocida la encarnizada lucha que tuvo que emprender la juventud inglesa, agrupada en el seno de la "Sociedad analítica" de los matemáticos, en los años 20 y 30 del siglo pasado, contra los representantes de las tradiciones caducas. Estos últimos habían convertido en dogma "sagrado" e intangible los métodos sintéticos y los símbolos empleados por Newton en los Principios, exigiendo que cualquier problema se resolviera a partir de ellos, sin transportarlo a un problema de tipo general suceptible de ser resuelto gracias a un sistema de cálculos". (°)

(°) Un extracto de la Introducción de los Manuscritos matemáticos publicados por el Instituto de marxismo-leninismo del PCUS (IMEL) se encuentra en Cartas sobre las ciencias de la naturaleza y las matemáticas. K. Marx/F. Engels. Ed. Anagrama. Barcelona, 1975 del que se tomaron las citas de p. 138, 139 y 136 respectivamente. Nota del Edit.

*Dirk Struik. "Marx y las matemáticas" en revista Críticas de la Economía Política No. 18/19; enero-junio 1981, Méx. 1983

**traducción al castellano en Karl Marx, Friedrich Engels. Cartas sobre las Ciencias de la Naturaleza y las Matemáticas. Ed. Anagrama. Barcelona 1975.

***Ibid.

(£) publicados en el presente volumen. Nota de Ed.

En conexión con ello iniciaremos una discusión en el curso de la cual el lector podrá situar mejor el objeto de Marx.

Así, los editores soviéticos indican -a mi modo de ver erroneamente- que:

Incluso leyendo globalmente todos sus manuscritos no se disipa un gran enigma: ¿por qué Marx pasó del estudio de la aritmética comercial al cálculo diferencial?.

El enigma no se disipa ni podrá disiparse nunca porque no es tal, sino un falso problema. Los editores soviéticos puestos a la tarea de hacer un Marx "científico" y "cada vez más científico" (y "científicamente actual") han creído poder organizar las cosas de modo tal que Marx debió ir profundizando más y más en la matemática en cuanto tal y ya sin conexión con la crítica de la economía política y, por ende, con la "política". Así presentan como verosimil el que "primero" (hacia 1869), Marx estudiara anotando en detalle "el gran curso de aritmética comercial de Feller y de Oderman", en ocasión de estudiar "los problemas de la circulación de capital y la función de las letras de cambio en la contabilidad entre los Estados" (p. 132 ed. cit.); para luego observarlo en 1878 y estudiar a fondo cálculo diferencial. Y no obstante que en la misma página de la introducción señalan que Marx conocía el cálculo diferencial desde tiempo atrás (1846-1858) y que, por ejemplo, "en el apéndice a una carta extraviada de finales de 1865, principios de 1866, Marx explica a Engels la esencia del cálculo diferencial a partir del problema de la tangente a una parábola" (ibid). No obstante, digo, todo se les convirtió en humo dos páginas después y ya no pueden dar "una respuesta satisfactoria al problema de saber qué incitó a Marx a pasar del estudio del álgebra y de la aritmética comercial al cálculo diferencial". Pero es que Marx no "pasó" "hacia allí" en esas fechas pues, por entonces -y de tiempo atrás- ya "estaba allí". La cuestión es más bien porque vio la ocasión y quizo profundizar, o mejor formulado: ¿por qué retomar problemas ya situados como tales pero de los cuales no se ocupó antes por ocuparse mejor de El Capital, etc.?. En efecto, hacía tiempo que Marx sabía que "las cosas fucionaban mal en el cálculo diferencial y más aún en su fundamento: las bases metodológicas". Por eso es que también Engels puede escribir en 1878 en su Anti Düring pues previamente ha comentado con Marx el caso del pseudofundamento del cálculo diferencial:

"Al introducir las magnitudes variables y al extender su variabilidad hasta lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, las matemáticas, de costumbres habitualmente morigeradas, han cometido un pecado; han comido el fruto del árbol del conocimiento, que les ha abierto el camino de los resultados más gigantescos, pero también el de los errores. Adiós al estado virginal de validez absoluta, de irrefutable demostración en que se hallaba todo lo que era matemático; se inauguró el reino de las controversias, y ahora hemos llegado al punto de que la mayoría de las personas utilizan el cálculo diferencial o integral, no por que entiendan lo que hacen, sino por fé ciega, porque hasta ahora los resultados son siempre justos".

La "controversia" a la que Engels se refiere es muy honda pues pone en juego el problema filosófico general de la identidad, la diversidad y la contradicción. Porque, o bien la derivada es igual a 0 ó desigual ($x-x_1 = 0$ o $x-x_1 \neq 0$) pero no vagamente es y no es; es idéntica consigo misma o difiere de sí; ¿qué es lo que fundamenta al cálculo diferencial y la contradicción que le es inherente?.

Según nos dice claramente Lucio Lombardo Radice (op.. cit.p.164) "En suma, mientras Marx negaba decididamente [1881], como pura "quimera", la idea de un infinitecimal, digamos intermedio entre el 0 y lo finito, y afirmaba "brutalmente" que una diferencia es finita o nada, Engels sigue vinculado [en 1878, en el Anti Diüring] a la idea de un "infinitesimo non quanto" (como decía Galileo) y al mismo tiempo no nulo, no consigue alejarse completamente de la concepción "mística" de Leibniz.

Aquí, Lombardo Radice no sólo se haya "diferenciando" o mejor, contraponiendo, "controvirtiendo" a Marx frente a Engels (tópico en el que parcialmente yerra) sino criticando el fondo que sostiene la construcción de la introducción de IMEL. En efecto, pues si ésta no dice claramente que Marx sea de una opinión contraria a la reseñada por Radice, tampoco aclara, sino que con una permanentemente oscura remisión a la "dialéctica" encubre

las diferencias y el problema esencial de la identidad y con ello de toda la lógica.

Lombardo Radice es proclive a las partes de la actualidad científica tal y como los introductores soviéticos, pero de modo diverso pues su apuesta -mejor que a la "lógica dialéctica"- allí donde presuntamente las cosas son y no son, está invertida en la "lógica matemática" como sofisticada modernización de la formal, firmemente basadas en el principio de identidad.

Henry Lefebre en su Lógica Formal y Lógica Dialéctica* ha sabido fundamentar cómo la dialéctica no es lo mismo que "sofística" o sofistería que juega con el ser esencial de las cosas, sino que se basa radicalmente en el principio de identidad para desarrollarlo y -ojo- al hacerlo, mantener coherencia en todo el argumento. El lector interesado puede ahondar en ese bello texto.

En el caso que nos ocupa Marx piensa los terminos así; sólo sobre la base de que $x=x_1$ y $x-x_1=0$ es posible que brote luego la diferencia entre x y x_1; sólo sobre la base de la identidad es posible la diferencia. El cálculo diferencial debe -y sólo así puede- fundarse radicalmente en labase algebráica y de lógica formal según la cual $A=A$ y $x=x$ y $x-x=0$, así que $x-x_1$ es primero $= 0$ y sólo durante el proceso de derivación $\neq 0$, una vez que x_1 ha crecido realmente.

Así interpreta Dirk J. Struik correctamente -y ya en 1948- la proposición de Marx -crítica implícita de IMEL etc.- pero se diferencía radicalmente de lo que Lucio Lombardo Radice escribe después de 1968.

La diferencia consiste en que Struik ha observado los [illegible] de la argumentación de Marx; por ello, a la vez sabe resaltar la esencia del proceso en el curso del cual la diferencia entre x y x_1 es producida, por ello a la vez puede mantener la igualación a cero :

---

*Ed. Siglo XXI, 1970.

$\frac{y - y_1}{x - x_1}$ ó $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Los dos planos en que Marx observa el fenómeno son real -que ocurre fuera de la ecuación- y el simbólico formal represen do en los pasos de la ecuación diferencial, la cual debe mantenerse cohe rente todo el tiempo.

Lucio Lombardo Radice parece olvidar el término fundamental de producción del incremento como de algo nuevo e irreductible con las cond ciones previas. En él la identidad es quietud y la diferencia ruptura, pu ra alteridad sin proceso de creación. Desde aquí es que busca contraponer al Engels de 1878 con el Marx de 1881. Cuando que ambos participan de est concepción, si bien difieren en la notación. Engels presentando la que se usaba y era deficiente debido a que la =0 núnca era nítida; mientras que Marx renovando la notación.

¿Pudo saber Engels en 1878 de este intento de Marx?, es posible que no, pero de paso le habría servido en su discusión con Dühring pues evidentemente debía presentar ante el público "pruebas" contra Dühring según eran de aceptación general no más bien en el curso de la polémica po-nerse a traer a cuento "novedades". En fin, que Lombardo Radice no sólo ol vida los objetivos distintos de ambos textos y el diverso tipo de comunica ción que un texto teórico, polémico y político muestra frente a un ensayo científico de uso interno. Olvida también los dos planos caros a Marx: el real y el terminológico. Así, todo parece resolverse en una vacía iguala-ción a 0 pero acorde con la lógica matemática -mejor que con la "dialécti ca"- actual, y no tanto por su verdad sino por su mero ser actual.

Ahora bien, el problema fundamental que Marx afronta es el de la forma de expresión coherente, de un contenido real en desarrollo. Problema que ya tuvo enfrente Hegel y buscó resolver con una nueva terminología dia léctica* sustentada en una suigeneris ontología. Hay en Marx otro dilema -desde 1841-1844 y otra debe ser, por tanto, su terminología. Marx la expo-

*Cfr.Th. W. Adorno. " Hegel Skoteinoz " en Tres Estudios sobre Hegel. Ed. Taurus; Madrid 1962.

ne preliminarmente y en referencia al Materialismo Histórico en su conjunto, en La Ideología Alemana (1846). Más específicamente en el terreno de la Crítica de la Economía Política la perfecciona hasta El Capital tomo I publicado en 1867, ensayando desde 1857 formas expositivas más emparentadas con la terminología hegeliana. Pero el problema general -la construcción de una -- "Dialéctica"- es lo que en sus últimos años busca atacar; que como se sabe -- debía ser una crítica radical de la Gran Lógica de Hegel. Ahora bien, este problema tiene en el de la notación matemática del cálculo diferencial un sitio privilegiado de resolución ejemplar pues a la fundamentación de la identidad se redobla y comprueba con el de mantener constante la igualdad.

A los 63 años (1881) -y viéndose corroido por la enfermedad y -extenuado por el trabajo- Marx anota sobre sus manuscritos matemáticos el rotulo "Para el General" (Engels), apodo cariñoso de éste, pués podrá usarlo en vistas a su Dialéctica de la Naturaleza. Ni que dudarlo, no sólo no pudo dar fin a El Capital, pero tampoco a su "Dialéctica". "Cuando me haya liberado de mi fardo económico [El Capital], escribiré una "Dialéctica", - escribe a Joseph Dietzgen el 9 de mayo de 1868, y añade: "Las leyes correctas de la dialéctica ya están contenidas en Hegel; es cierto que bajo una forma mística. Se trata de despojarlas de esta forma..."* del mismo modo - que a las derivadas.

Lo que nos resultará más evidente si recordamos que en un manuscrito dedicado a la historia del cálculo diferencial Marx distingue 3 métodos historicamente acaecidos a los que él añade el suyo propio, en el cual

*Cartas sobre Ciencias Naturales y Matemáticas. ed. cit. p. 65.

ha buscado "despojar" al cálculo de su forma de expresión mística (este escrito es el que hoy publicamos). En efecto, Marx señala al método de Leibniz/Newton como método "místico", al de D'Lambert/Euler como "racional" y al de Lagrange como "algebraico", pero subraya que incluso éste último no mantiene el principio místico de aquellos; a saber, donde $x - x_1$ no es decididamente = 0, sino que la cantidad "infinitesimal" sólo "tiende" a 0 y patina en él a gusto del matemático que la manipula. Igual en Hegel no se tiene una positiva identidad plena, tranquila, etc., sobre la cual fundar una dialéctica materialista y por tanto positiva (que no positivista) y revolucionaria. Pero sin verdadera identidad no hay verdadera negación, las contradicciones reales pueden ser evaporadas en el espíritu conciliador. - Ya L. Feuerbach criticó el nihilismo de Hegel idéntico con su panteismo.

Sin profundizar más por el momento, en la discución con IMEL, -- Struik y L.L. Radice, sólo nos queda señalar cómo en El Capital y desde -- los Grundrisse de 1857, se nos ofrece nítido el fondo de la concepción marxiana sobre el cálculo (no aún la remodelada notación). Según la cual se -- concibe al incremento como producto de un auténtico proceso de producción.

Precisamente, así es demostrado el concepto de plusvalor. La formula mistificada del capital D - M - D' ofrece una D idéntica consigo misma pues tal parece que su equivalente es D' = D + ΔD; y tal parece que la circulación, el mero cambio de lugar -no ningún proceso real de transformación- de D y la M es la alquimíca marmita de tal misterioso acrecen -- miento alterante. Criticamente Marx indica que el incremento, la ΔD, ha sido producido en el proceso de producción y particularmente subraya que ha sido explotado el trabajador por el capital; el capital, factor de la fórmula general mistificada D - M - D' y de la fetichización del conjunto de las relaciones sociales en la conciencia de los agentes humanos.

Evidentemente para ofrecer la demostración de tal crítica de la incoherencia de la fórmula pseudo dialéctica del capital -análoga a la hegeliana- es forzoso partir de la ley del intercambio de equivalentes y sólo sobre la base de la igualdad, explicar la resultante inequivalencia; no más bien presupuesta, pues así nada se demostrará. Hic Rodhus hic Salta(*) termina con este lema el parágrafo 2 del capítulo IV del tomo I de El Capital "La transformación del dinero en capital" (o dinero que se incrementa,- parágrafo dedicado a plantear el problema que nos ocupa. La labor apologético-mistificante de la Economía Política Burguesa ha consistido en eso: -- presuponer el plus, por ejemplo bajo el modo de atribuirlo a las máquinas,- al ahorro, al riesgo, a la astucia y a la circulación.

La coherente forma de expresión de la realidad diléctica; he --- allí el nucleo del interés de Marx por el cálculo diferencial (interés anterior a 1857 por lo menos) y que luego lo emparenta a la crítica de la -- economía política, pero manteniéndolo a la vez independiente de este sustrato para luego, otra vez, poder desarrollarse de por sí.

Pero ni que decirlo, las fórmulas mistificadas de capital pero también las formas de expresión del valor y el plusvalor, la transformación de valores en precios de producción, así como el fetichismo de las relaciones mercantiles, etc., son tópicos vinculados esencialmente con el cálculo en cuanto tal y su forma mistificada de expresión; y sólo su resolución, en tanto formas generales de la sociedad burguesa, le ha permitido a Marx resolver la cuestión particular del cálculo diferencial cuyo inicio se remonta a los orígenes de la sociedad burguesa.

En torno al problema de la Matemática se decide buena parte de - la decisión de Marx por una forma expositiva dialéctica y ya propia de su crítica de la Economía Política. El dual punto de partida de la ciencia de la Lógica de Hegel, el Ser y la Nada, queda desbancado.

♦

(*) ¡ Esta es Rodas, Salta aquí ¡-. En las fábulas 203 y 203b de Escpo (numeradas según la edición crítica de Halm, leipzig, 1852), tal es la respuesta dada a un fanfarrón que se vanagloriaba de haber efectuado en Rodas un salto descomunal (Nota de Ed.,. Esta nota fué tomada de la Edición de El Capital de siglo XXI T.I. vol. 3 p.1056)

I

SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCION (1)
(MANUSCRITO 4147)

Supongamos que la variable independiente X crece hasta el valor X_1 y por tanto la variable dependiente Y crece hasta Y_1 (2).

Aquí en la parte I se considera el caso más simple, cuando X aparece solamente a la primera potencia.

1) $Y = aX$, si X crece hasta X_1, entonces

$$Y_1 = aX_1 \quad , \text{ luego}$$

$$Y_1 - Y = a(X_1 - X)$$

(1) Este manuscrito fué elaborado por Marx en 1881 para Engels. Este es el primer trabajo, del ciclo de manuscritos pensado por Marx, dedicado a la exposición sistemática de sus ideas relativas a la naturaleza e historia del Cálculo Diferencial. En este trabajo él introduce la noción de derivación algebráica que le pertenece y el correspondiente algoritmo para calcular la derivada de ciertas clases de funciones. En el sobre adjunto al manuscrito está una leyenda escrita por Marx: "Para el General". Así le llamaban en la familia de Marx a Engels por sus artículos referentes a problemas militares. En cuanto Engels conoció este manuscrito respondió a Marx felicitándole en carta del 18 de agosto de 1881 (véase las obras de Marx K. y Engels F., tomo 35 pags. 16-18). El texto alemán del manuscrito se publica con las rectificaciones hechas por Marx al texto original. Algunos de los materiales preparatorios (bosquejos, complementos) se publican en el manuscrito 4146 de la presente edición*. Las referencias a borradores no publicados son señalados en estas anotaciones al pie de página. Este manuscrito fué publicado por primera vez (incompleto) en 1933 en ruso en la revista "Marksizm y Estiestvoznanie", Partizdat, Moscú (1933) 5-11 y en la revista "Pod znamieniem Marksizm" No. 1 (1933) 15. En la edición bilingue por primera vez aparece en alemán.

*Se refiere a la edición bilingue ruso-alemán [Nota de Ed.]

(2) Para evitar errores con la notación de derivada aquí y en lo subsecuente en casos similares las notaciones usadas por Marx X', Y', ... para los nuevos valores de las variables serán sustituidos por X_1 ; Y_1 , ... En las fuentes que Marx utilizó no aparecia la noción de valor absoluto (módulo). Por esto Marx con frecuencia (por lo visto para fijar ideas) considera sólo los valores crecientes de las variables, pero hay veces (véase por ejemplo en los manuscritos 4001, 4302) que habla también sobre "el crecimiento" de X en un incremento h positivo o negativo".

Si ahora realizáramos la operación de derivación, esto es si permitiramos a X_1 disminuir hasta X, obtendríamos:

$$X_1 = X \; ; \; X_1 - X = 0$$

por consiguiente:

$$a\,(X_1 - X) = a \cdot 0 = 0$$

Luego, dado que Y creció hasta Y_1 sólo como consecuencia de que X creció hasta X_1 , entonces también tendríamos:

$$Y_1 = Y \; ; \; Y_1 - Y = 0$$

Por lo tanto

$$Y_1 - Y = a\,(X_1 - X)$$

se convertiría en $0 = 0$

Primeramente la formación de diferencias y luego inversamente quitarlas nos lleva literalmente a la nada. Toda la dificultad para entender la operación de derivación (como también para entender la negación de la negación, en general) consiste precisamente en apreciar en qué se distingue dicha operación [de derivación] de tal procedimiento simple [de suma y resta] y como lleva, por lo tanto, a resultados reales.

Si dividimos $a(X_1-X)$ y respectivamente el primer término de la última ecuación entre el factor (X_1-X), obtendremos:

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} = a$$

Puesto que Y es la variable dependiente, ella en general no puede realizar ningún cambio en forma independiente. Debido a ésto [puesto que aquí $y = ax$] no es posible hacer $Y_1 = Y$ y por consiguiente no puede hacerse $Y_1 - Y = 0$, sin que antes X_1 sea igual a X.

Por otro lado vimos que X_1 no puede ser igual a X en la función $a(X_1 - X)$, sin que esta última se reduzca a cero. Por esto en el momento en que dividimos entre el factor (X_1-X) ambos lados de la ecuación, este factor resulta

...cesariamente una diferencia finita(3). De este modo, en el momento en que formamos la relación

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X}$$

La expresión (X_1-X) representa siempre una diferencia finita y por lo tanto

$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X}$ es una relación entre diferencias finitas; correspondientemente a esto.

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Es así que

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} \quad ó^{(4)} \quad \frac{\Delta Y}{\Delta X} = a$$

donde la constante a aparece como límite de la relación de las diferencias finitas de ambas variables. (5)

(3) De acuerdo a la terminología acostumbrada en las fuentes utilizadas por Marx, al decir diferencia finita se sobrentiende una diferencia no igual a 0.

(4) En toda ecuación Marx distingue sus dos miembros, los cuales no siempre juegan un papel simétrico. En el miembro izquierdo de la igualdad frecuentemente él coloca dos expresiones sinónimas diferentes unidas por el conectivo "o".

(5) En la literatura matemática que Marx tuvo a su disposición el término "límite" (de una función) no tenía un único significado y lo más frecuente es que se entendiera como el valor de la función, alcanzado por ella finitamente al final de un proceso infinito de aproximaciones de la variable a su valor límite (véase el apéndice: "Sobre el concepto de límite en las fuentes utilizadas por Marx"). A la crítica de tales deficiencias está dedicado el manuscrito 4144: "Sobre la unicidad de los términos 'límite' y 'Valor límite'". En el presente manuscrito el término "límite" es utilizado por Marx en un sentido especial: como la expresión que redefine la relación dada para aquellos valores de la variable en los que la expresión original no está definida. Expresiones necesitadas de tal redefinición fueron para Marx las relaciones $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ (se reduce a $\frac{0}{0}$ cuando $\Delta X=0$) y la $\frac{dy}{dx}$, esta última interpretada como expresión simbólica para una relación de "diferencias finitas eliminadas", esto es para $\frac{0}{0}$. Marx entiende la aplicación del "límite" a la relación $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ en cierta corre

Puesto que a es constante, ni a, ni la parte derecha de la ecuación reducida a ella, no admite cambio alguno. En tal caso el proceso de derivación ocurre en la parte izquierda de la ecuación:

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} \quad o \quad \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

y esta resulta ser una característica de funciones simples tales como ax.

Supongamos que en el denominador de la relación [variable] X_1 decrece aproximándose a X; la frontera de su decrecimiento será alcanzada cuando X_1 se reduce a X de manera que la diferencia (X_1-X) resulta igual a $X - X = 0$ y consecuentemente también $Y_1 - Y = Y - Y = 0$. En esta forma obtenemos:

$$\frac{0}{0} = a$$

Dado que en la expresión $\frac{0}{0}$ se esfumó toda huella de su procedencia y valor, entonces la sustituimos por $\frac{dY}{dX}$, donde las diferencias finitas $X_1 - X$ ó ΔX y $Y_1 - Y$ ó ΔY aparecen en forma simbólica como diferencias eliminadas o desaparecidas, de manera que $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ se convierte en $\frac{dY}{dX}$

pondencia con las definiciones de este concepto contenidas en los textos de Hind y Lacroix, a saber: como la expresión identicamente igual a la relación $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$, así $\Delta X \neq 0$, pero redefinida por continuidad cuando se reduce a $\frac{0}{0}$. Lo entendido aquí por "límite" debería entenderse como la "prederivada". Sobre este particular Marx escribe (véase la parte II) aplicado a la relación $\Delta Y/\Delta X$, donde $Y = aX^3 + bX^2 + CX + d$. La "prederivada" a $(X_1^2 + X_1X + X^2) + b(X_1+X)$ + C resulta ser el límite de la relación de las diferencias finitas, es decir, independientemente de lo pequeñas que sean tales diferencias el valor de $\Delta Y/\Delta X$ estará dado por esta "derivada". Más adelante en mismo II, Marx dice que haciendo X_1 igual a X, o sea X=0 "Lleva este límite a su valor mínimo", lo cual da como resultado "La derivada definitiva". En forma análoga por "Límite de la relación de diferenciales" Marx entiende en este manuscrito la expresión "real" ("algebraica", véase la nota al pie de página No. 6) que le confiere un valor a dicha relación, en otras palabras, la función derivada. Sin embargo Marx escribe que en la ecuación $\frac{dY}{dX} = f'(X)$ "ninguno de los dos términos es el valor límite del otro; estos términos no se encuentran uno respecto del otro en relación de límite, sino en relación de equivalencia" (véase el final del manuscrito 4144). Este mismo término en otro lugar (véase el final del manuscrito 4148, tercer bosquejo) como sustituible por la categoría de límite en el sentido que tiene en el texto de Lacroix, en donde tal categoría posee un valor importante para el cálculo diferencial e integral (sobre la definición de Lacroix véase el apéndice: "Sobre el concepto de Límite en las fuentes matemáticas que utilizó Marx").

Así $\frac{dY}{dX} = a$

Ciertos matemáticos racionalizadores se regocijan fuertemente del hecho consistente en que las magnitudes dY y dX cuantitativamente parecen como si sólo fueran magnitudes infinitamente pequeñas [y que su relación] es sólo cercana a $\frac{0}{0}$, resultan una quimera, como será mostrado palpablemente en la parte II. Vale además la pena recordar como particularidad del caso considerado que tanto $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = a$ como $\frac{dY}{dX} = a$, esto es, el límite [de la relación] de las diferencias finitas resulta también el límite [de la relación] de diferenciales.

2) Como 2o. ejemplo del mismo caso puede servir: $Y = X$; $Y_1 = X_1$, $Y_1 - Y = X_1 - X$

$$\frac{Y_1-Y}{X_1-X} \text{ ó } \frac{Y}{X} = 1, \ \frac{0}{0} \text{ ó } \frac{dY}{dX} = 1$$

II

Cuando tenemos la expresión $Y = f(X)$, donde particularmente en el segundo miembro de esta ecuación aparece una función (de) X en su expresión algebraica desarrollada(6), llamaremos a tal expresión función original de X; a su primera modificación obtenida mediante el planteamiento de incrementos "derivada" previa de la función (de) X -mientras que la forma final que toma como resultado del proceso de derivación la llamaremos "derivada" de la función X (7)

---

(6) Bajo el nombre de "algebraica" Marx entiende toda expresión que no contiene símbolos de derivadas o diferenciales. Tal uso del término "expresión algebraica" es característico de la literatura matemática de principios del siglo XIX. Con frecuencia Marx distingue los conceptos de función siguientes: "función de (von) X" y "función en (in) X", esto es función como correspondencia y función como expresión analítica (véase el manuscrito 4302 "manuscrito inconlcuso: Teorema de Taylor"). En el presente manuscrito Marx no se ciñe rigurosamente a tal distinción, mencionando frecuentemente sólo "función (de) X" (donde el (de) es un agregado obligado en castellano, pero que evidentemente no aparece en el original) posiblemente esto se deba a que siempre está hablando de funciones dadas por ciertas "expresiones algebráicas". La correspondencia que relaciona el valor de la variable independiente X con el valor de la variable dependiente Y Marx la da mediante la ecuación $Y - f(X)$, donde Y es la variable dependiente y $f(X)$ es la expresión analítica, considerada respecto de la variable incluida, X.

(7) La esencia del método de derivación algebraica presentado por Marx consiste en que la relación $\frac{f(X_1) - f(X)}{X_1 - X}$ del cociente de incrementos (que tiene sentido sólo si $X_1 \neq X$) él la redefine por continuidad en $X_1 = X$. Con este fin es que busca la función $\varphi(X_1, X)$ la cual para $X_1 \neq X$ coincide con la relación $f(X_1) - f(X) / X_1 - X$ y es continua bajo $X_1 \to X$. A tal función $\varphi(X_1, X)$ Marx le llama función derivada previa de la función f(X). Si esta última existe (lo cual tiene lugar para la clase de funciones aquí consideradas) entonces dicha derivada coincide con la actual noción de derivada:

$$\lim_{X_1 \to X} \frac{f(X_1) - f(X)}{X_1 - X} = f'(X)$$

En esta época a Marx ya le eran conocidas funciones para las que el operador derivada no estaba definido (véase el manuscrito 4302).

1) $Y = a X^3 + b X^2 + C X - e$

Si X crece hasta X_1, entonces

$$Y_1 = a X_1^3 + b X_1^2 + C X_1 - e$$

$$Y_1 - Y = a\,(X_1^3 - X) + b\,(X_1^2 - X^2) + C\,(X_1 - X)$$

$$= a(X_1-X)\,(X_1^2+X_1X+X^2) + b(X_1-X)(X_1+X) + C\,(X_1-X)$$

De donde:

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} \quad \text{o} \quad \frac{\Delta Y}{\Delta X} = a\,(X_1^2 + X_1X + X^2) + b(X_1 + X) + C$$

La "derivada" previa

$$a(X_1^2 + X_1X + X^2) + b(X_1 + X) + C$$

aquí resulta ser el límite del cociente de incrementos, es decir, no importa que tan pequeñas sean tomados estos incrementos el valor de $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ quedará dado por esta "derivada". Sin embargo tal valor no coincide, como en la parte I, con el límite del cociente de diferenciales*.

Si en la función

$$a(X_1^2 + X_1X + X^2) + b\,(X_1 + X) + C$$

la variable X_1 decrece, hasta no alcanzar la frontera de su disminución, esto es, hasta no llegar a ser igual a X, entonces X_1^2 se transforma en X^2, X_1X en X^2 y $X_1 + X$ en 2 X, y así obtenemos la "derivada" de la función (de) X:

$$3aX^2 + 2\,b\,x + C$$

* Luego de esta frase en el borrador de este manuscrito (4146 p.4) se dice: "Por otro lado el proceso de derivación ocurre ahora en la "derivada" previa de la función (de) X (parte derecha), mientras que en la parte izquierda necesariamente el mismo proceso acompaña a este movimiento".

Aquí claramente se revela lo siguiente:

En primer lugar, para la obtención de la "derivada" es necesario hacer X_1 igual X, lo que significa desde un punto de vista matemático estricto, sin rodeos debidos solamente a la aproximación infinita, que $X_1 - X = 0$.

En segundo lugar, el hecho de hacer $X_1 = X$ y por lo tanto $X_1 - X = 0$, no agrega absolutamente nada simbólico a la "derivada" **. La magnitud X_1 introducida originalmente a través de la variación de X no desaparece, tal magnitud solamente se reduce a su límite mínimo = X y permanece como cierto elemento de nuevo introducido en la función (de) X original. Esta magnitud X_1 en combinaciones parciales consigo misma y parcialmente con la X de la función original nos da la derivada definitiva, o sea, la "derivada" previa reducida a su magnitud mínima.

La reducción de X_1 a X dentro de la función primera derivada (previa) transforma la parte izquierda $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ en $\frac{0}{0}$ ó en $\frac{dY}{dX}$ lo cual significa que

$$\frac{0}{0} \;\text{ó}\; \frac{dY}{dX} = 3\,a\,X^2 + 2bX + C$$

de tal manera que la derivada aparece como el límite de la relación de las diferenciales.

La tribulación trascendente o simbólica ocurre solamente en la parte izquierda de la expresión, pero ya habiendo perdido su forma horripilante, dado que ahora aparece solamente como una expresión del proceso, cuyo contenido real aparece en la parte derecha de la misma ecuación.

En la "derivada" $3aX^2 + 2\,bX + C$

** En lugar de esto en el borrador se dice lo siguiente:
"b) La búsqueda de la "derivada" de la función original (de) X ocurre de manera que primeramente tomamos cierta derivación finita [formando los incrementos, o sea, las diferencias finitas]; esto último nos da la "derivada" previa, que resulta ser el límite para $\Delta Y / \Delta X$. Al proceso de derivación que enseguida pasamos lleva a este límite a su valor mínimo. La magnitud X_1 introducida en la primera derivación no desaparece...".

la variable X se encuentra en condiciones totalmente distintas a las que se encontraba en la función original (de) X (precisamente en $aX^3 + bX^2 + C X - e$). Por esto ella (esta derivada) a su vez puede aparecer como función original y mediante la reanudación del proceso de derivación establecido puede ser de nuevo fuente de una cierta "derivada". Esto puede repetirse hasta que la variable X no sea finalmente eliminada de alguna derivada, por lo tanto, esto puede extenderse infinitamente sólo en aquellas funciones de X representables como sumas infinitas, lo que ocurre en la mayoría de los casos.

Los símbolos $\frac{d^2Y}{dX^2}$, $\frac{d^3Y}{dX^3}$, etc. indican sólo la "derivada" genealógica respecto de la función original(de)X dada inicialmente. Sólo aparecen como símbolos mágicos en caso de interpretarlos como punto de partida del movimiento y no simplemente como expresiones de las funciones (de) X deducidas. Entonces en efecto parece sorprendente que la relación de magnitudes que se anulan deben nuevamente pasar por grados superiores de anulación, mientras que a nadie le sorprende que por ejemplo $3X^2$ puede recorrer el proceso de derivadación tan exitosamente como su progenitora X^3. Dado que de $3X^2$ podemos partir como de una función original de X.

Sin embargo notabene. El cociente de incrementos $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ es el punto de partida del proceso de derivación prácticamente sólo en las ecuaciones como las tratadas en la parte I, donde X aparece sólo a la primera potencia. Pero entonces como se muestra en la parte I, obtenemos como resultado que:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = a = \frac{dY}{dX}$$

Por ende, aquí mediante el proceso de derivación, por el que pasa $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ efectivamente no se determina ningún nuevo límite. Esto [la búsqueda del nuevo límite] es posible sólo debido a que la "derivada" previa contiene a la variable X, es decir, porque $\frac{dY}{dX}$ permanece como símbolo de cierto proceso real.*

* La frase correspondiente en el borrador (p.7) dice así: "Esto puede obtenerse sólo allí, donde la función "derivada" previa contiene la variable X, por eso también su movimiento puede formar cierto nuevo valor auténtico, de manera que $\frac{dY}{dX}$ es el símbolo de un proceso real".

Esto, evidentemente, de ninguna forma impide el que en el cálculo diferencial los símbolos $\frac{dY}{dX}$, $\frac{d^2Y}{dX^2}$, etc. y sus combinaciones aparezcan en el lado derecho de la ecuación. Pero entonces sabemos también que tales ecuaciones sibólicas puras sólo señalan aquellas operaciones que luego hay que realizar sobre las funciones reales de sus variables

2) $Y = aX^m$

Si X se conviente en X_1, entonces $Y_1 = a X_1^m$ y

$$Y_1 - Y = a(X_1^m - X^m)$$

$$= a(X_1 - X)(X_1^{m-1} + X_1^{m-2} X + X_1^{m-3} X^2 + \text{etc.}, \text{ hasta el término } X_1^{m-m} X^{m-1})$$

tendremos

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} \text{ ó } \frac{\Delta Y}{\Delta X} = a\,(X_1^{m-1} + X_1^{m-2} X + X_1^{m-3} X^2 + \ldots + X_1^{m-m} X^{m-1})$$

Si ahora aplicamos a esta "derivada previa" el proceso de derivación, de manera que al hacer

$X_1 = X$ ó $X_1 - X = 0$

tendremos que

X_1^m se transforma en X^{m-1}

$X_1^{m-2} X$ se transforma en $X^{m-2} X = X^{m-2+1} = X^{m-1}$

$X_1^{m-3} X^2$ se transforma en $X^{m-3} X^2 = X^{m-3+2} = X^{m-1}$

y finalmente

$X_1^{m-m} X^{m-1}$ se transforma en $X^{m-m} X^{m-1} = X^{0+m-1} = X^{m-1}$

Obtenemos de este modo, m veces la función X^{m-1} y la "derivada" es -- consecuentemente $m\ a\ X^{m-1}$.

Gracias a la igualdad de $X_1 = X$ en la "derivada previa"* en el lado - izquierdo el cociente $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ se transforma en $\frac{0}{0}$ ó $\frac{dY}{dX}$, de donde

$$\frac{dY}{dX} = m\ a\ X^{m-1}$$

Podría exponerse de esta manera todas las operaciones del cálculo diferencial, pero resultaría un pedantismo diabólico innecesario. De todas formas plantearemos aquí un ejemplo adicional, ya que en los anteriores la diferencia $X_1 - X$ aparecía en la función (de) X <u>sólo una vez</u> y por eso al formar la expresión

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} \quad ó \quad \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

desaparecía de la parte derecha. Esto no ocurre en el siguiente caso:

3) $Y = a^X$

Si X se transforma en X_1, entonces

$$Y_1 = a^{X_1}$$

de donde

$$Y_1 - Y = a^{X_1} - a^X = a^X\ (a^{X_1 - X} - 1)$$

[pero]

$$a^{X_1 - X} = \left\{1 + (a-1)\right\}^{X_1 - X}$$

* Es decir, en el lado derecho.

y

$$\left\{1 + (a-1)\right\}^{X_1 - X} = 1 + (X_1 - X)(a-1) + \frac{(X_1 - X)(X_1 - X - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \text{etc}^{(8)}$$

de donde

$$Y_1 - Y = a^X(a^{X_1 - X} - 1) = a^X\left\{(X_1 - X)(a-1) + \frac{(X_1 - X)(X_1 - X - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \frac{(X_1 - X)(X_1 - X - 1)(X_1 - X - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 + \text{etc.}\right\}$$

$\therefore$ (9)

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} \quad ó \quad \frac{\Delta Y}{\Delta X} = a^X\left\{(a-1) + \frac{X_1 - X - 1}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \frac{(X_1 - X - 1)(X_1 - X - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 + \text{etc.}\right\}$$

Si ahora hacemos $X_1 = X$ y por consecuencia $X_1 - X = 0$, obtendremos entonces como "<u>derivada</u>"

$$a^X\left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}$$

y así

$$\frac{dY}{dX} = a^X\left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}$$

(8) Aquí Marx reprodujo el desarrollo formal de una función en serie característico de los libros de matemáticas a los que él tuvo acceso, dejando de lado los problemas de convergencia de la serie obtenida y coincidencia de los valores de la función con los límites de las sumas parciales.

(9) $\therefore$ símbolo usado en las demostraciones para sustituir la frase "por lo tanto".

Si designamos ahora la suma de constantes en las llaves a través de - A, entonces

$$\frac{dY}{dX} = A\,a^X$$

aquí, sin embargo A = al logaritmo neperiano del número a, resulta ser que la $\frac{dY}{dX}$ o, si se sustituye a Y por su valor, $\frac{da^X}{dX} = \log a \cdot a^X$, y

$$da^X = \log a \cdot a^X dX$$

Complemento.[10]

Teníamos

1) Los casos considerados, donde el factor (X_1-X) aparece sólo una vez en [la expresión, que lleva a] "derivada previa", o sea a la ecuación en diferencias finitas[11], como consecuencia de lo cual al dividir ambos lados por X_1-X se forma [una expresión para]

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} \quad \text{ó} \quad \frac{\Delta Y}{\Delta X},$$

[que no contiene la diferencia introducida X_1-X], es decir, este factor se simplifica de la función (de) X.

2) (En el ejemplo: $d(a^X)$) los casos considerados, donde permanecen -- factores $(X_1 - X)$ en la función (de) X luego de formar [la relación] $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$.[12]

3) Falta considerar aún aquel caso, donde el factor $X_1 - X$ directamente no se elimina de la primera ecuación en diferencias ([que nos lleva a] la "derivada previa")

$$Y = \sqrt{a^2 + X^2}$$

$$Y_1 = \sqrt{a^2 + X_1^2}$$

$$Y_1 - Y = \sqrt{a^2 + X_1^2} - \sqrt{a^2 + X^2}$$

dividimos esta función en X -consecuentemente también la parte izquierda- entre $X_1 - X$. Entonces

(10) El texto titulado "Complemento" lo constituye el contenido adjunto en una hoja separada al manuscrito, la cual tiene numeradas sus páginas en forma independiente: 1 y (el reverso 2).

(11) Bajo ecuación en diferencias finitas, por lo visto, Marx tiene en mente - expresiones tipo: $f(X_1) - f(X) = (X_1-X)\,\varphi(X_1,X)$. (véase la anotación(7)).

(12) En este lugar Moore escribió a lápiz: "No es así, estos factores son X_1-X-1 , X_1-X-2 , etc.Por lo visto Marx aquí presuponía no los factores (X_1-X) sino las expresiones X_1-X y quizo decir que la reducción a cero de la diferencia X_1-X conservadas en las expresiones para la derivada previa, no priva de veracidad a esta última

$$\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X} \quad (\text{ó} \quad \frac{\Delta Y}{\Delta X}) = \frac{\sqrt{a^2+X_1^2} - \sqrt{a^2+X^2}}{X_1-X}$$

Para librar al lector de las irracionalidades multipliquemos numerador y denominador por $\sqrt{a^2+X_1^2} + \sqrt{a^2+X^2}$ y obtenemos:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{a^2+X_1^2 - (a^2+X^2)}{(X_1-X)(\sqrt{a^2+X_1^2} + \sqrt{a^2+X^2})} = \frac{X_1^2 - X^2}{(X_1-X)(\sqrt{a^2+X_1^2} + \sqrt{a^2+X^2})}$$

ero

$$\frac{X_1^2 - X^2}{(X_1-X)(\sqrt{a^2 + X_1^2} + \sqrt{a^2 + X^2})} = \frac{(X_1-X)\ (X_1+X)}{(X_1-X)(\sqrt{a^2+X_1^2} + \sqrt{a^2+X^2})}$$

or lo tanto

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{X_1 + X}{\sqrt{a^2 + X_1^2} + \sqrt{a^2 + X^2}}$$

Si ahora se hace $X_1 = X$ ó $X_1 - X = 0$, entonces:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X}{2\sqrt{a^2 + X^2}} = \frac{X}{\sqrt{a^2 + X^2}}$$

or lo tanto

$$dY \quad \text{ó} \quad d\sqrt{a^2 + X^2} = \frac{XdX}{\sqrt{a^2 + X^2}}$$

TEXTOS CITADOS.

Boucharlat J.-L., Élemens de calcul differentiel et de calcul integr. 5-me éd., Paris 1838.

Euler L., Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analy finitorum ac doctrina serierum, Berlin, 1775.

Hall Th. G., The elements of algebra, 3rd ed., Cambridge, 1850.

Hind J., The principles of the differential calculus; with its aplic tion to curves and curve sufaces, 2 end ed., Cambridge 1831.

Lacroix S.F., Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 3 vol. 2nd éd., Paris, 1810-1819.

Maclaurin C.A., Treatise of algebra in 3 parts, 6th ed., London 1796

Sauri, Cours complet de mathématiques, 5 vol., Paris, 1778.

MARX Y LAS MATEMATICAS

Dirk J. Struik*

Marx recibió su preparación inicial en matemáticas en la escuela secundaria superior de Trier (Treveris), la ciudad del Rhin donde nació. Al graduarse, en 1835, sus conocimientos en matemáticas eran considerados adecuados. Esto significa que comenzó su carrera con algunas nociones de aritmética elemental, álgebra hasta las ecuaciones cuadráticas, geometría plana y del espacio. También pudo haber tenido trigonometría, un poco de álgebra superior, geometría analítica, y cálculo.

No hay indicios de que mostrara algún interés por las matemáticas, durante los turbulentos años anteriores y posteriores a 1848, en los cuales él y Engels desarrollaron su visión sobre el mundo. La primera prueba de que Marx había vuelto a su estudio de las matemáticas, data del período en el cual se había establecido en Londres y estaba trabajando en sus grandes proyectos científicos. En una carta a Engels del 11 de enero de 1858, escribió:[1]

"Durante la elaboración de los principios económicos he estado tan condenado a retrasarme por errores de cómputo, que por desesperación he acometido de nuevo una revisión rápida del álgebra. La aritmética fué siempre

* Traducción del inglés por Jaime Puyana F.

[1] *Marx-Engels Gesamtausgabe* (Berlin, 1930), Abt. III, Bd. II, p. 273.

ajena a mí. De todos modos, vía un rodeo algebráico me puse al día rápidamente."

A partir de este momento hasta su muerte en 1883, Marx mostró continuo interés en el estudio de las matemáticas, volviendo frecuentemente a este como una diversión durante sus numerosos días de enfermedad.

Su estudio del álgebra fué seguido por el de la geometría analítica y el cálculo. En una carta a Engels del 6 de julio de 1863 reportaba sus progresos:

"En mi tiempo libre, trabajo en cálculo diferencial e integral. ¡A propósito! Estoy lleno de libros sobre eso y si quieres te envío uno para que ataques este campo. Lo considero casi necesario para tus estudios militares. Es también una parte de las matemáticas mucho más sencilla (en cuanto al lado puramente técnico se refiere) que, por ejemplo, las partes más elevadas del álgebra. Aparte del conocimiento del álgebra común y aspectos de trigonometría, no se requieren estudios preparatorios, excepto alguna familiaridad general con las secciones cónicas."[2]

Parece por lo tanto que Marx encontró al álgebra más fácil que la aritmética y al cálculo más fácil que el álgebra. Pero no estuvo tan interesado por la técnica del cálculo. Fué arrastrado irresistiblemente por el milenario interrogante referente al fundamento del cálculo, tanto más, ya que en los libros consultados por él, el tema fue tratado con la mayor inaceptabilidad y ocasionalmente de manera controversial. Marx, como tantos pensadores dialécticos anteriores y posteriores a él, encontró ilimitada fascinación en las distintas definiciones de la derivada y la diferencial, como lo muestra una gran cantidad de material manuscrito hallado entre sus papeles.

En los años posteriores a 1870, Marx inclusive trató de desarrollar sus propios puntos de vista. Engels reporta sobre esta fase, en su prefacio al volúmen segundo de *El Capital*.

"Después de 1870, se dió otra interrupción debida principalmente a su enfermedad. El contenido de varios

[2] *Ibid.*, III, p. 149.

cuadernos de notas con resúmenes, de este período consiste de agronomía, relaciones agrarias americanas y especialmente rusas, dinero, mercado y sistemas bancarios, y finalmente ciencias naturales, geología y fisiología, y especialmente escritos matemáticos independientes."[3]

Marx, en los últimos días de su vida, desarrolló algunas reflexiones, en forma legible, con relación al cálculo diferencial, y envió el manuscrito a Engels. Una carta del 18 de agosto de 1881 muestra que Engels los había estudiado:

"Ayer adquirí al fin el valor para estudiar tus manuscritos matemáticos, aún sin referencias a textos, y me fue grato observar que no los necesitaba. Te felicito por tu trabajo. El tema es tan claro (*sonnenklar*) que no podemos dejar de asombrarnos todavía cómo los matemáticos insisten en su mistificación."[4]

Engels en sus propias palabras sigue presentando el punto de vista de Marx, y lo compara con el de Hegel, con quien ambos tenían entera familiaridad. Y termina con las palabras:

"La cuestión me ha dominado hasta tal punto que no sólo da vueltas alrededor de mi cabeza todo el día, sino que también la última semana, en un sueño, le di a un tipo los botones de mi camisa para que los diferenciara y éste se fué corriendo con ellos (*und dieser mir damit durchbrannte*)."[5]

Marx, preocupado en ese tiempo por la enfermedad de su esposa —quién murió en diciembre de ese año— parece ser que no volvió al tema en la subsecuente correspondencia. Sin embargo, cuando Engels le reportó a Marx (noviembre 21 de 1882) sobre un intercambio de cartas con el amigo de ambos, Sam Moore, sobre el tema de las teorías matemáticas de Marx, éste efectuó una rápida respuesta al día siguiente. Volveremos a dicha correspondencia más tarde en este artículo.

Marx murió antes de poder añadir algo más a sus ideas.

[3] *Capital* (Chicago, 1919), II, p. 10. (Hay varias ediciones en español).

[4] Marx-Engels *Gesamtausgabe*, Abt. III, Bd. IV, p. 513.

[5] *Ibid*, p. 514.

Engels pensó más tarde en publicar los manuscritos matemáticos de Marx junto a los suyos sobre la dialéctica de la naturaleza. En el prefacio a la segunda edición del *Anti-Düring* (1885) menciona sus propios estudios, sobre matemáticas y ciencias naturales, y agrega que tuvo que descontinuarlos después de la muerte de Marx. Concluye: "tal vez más tarde haya oportunidad de recopilar y publicar los resultados obtenidos junto con los póstumos y muy importantes manuscritos de Marx."[6]

Engels no halló tiempo para completar esta tarea, y los papeles de Marx y Engels que se referían a las ciencias exactas permanecieron en los archivos. Los socialdemócratas alemanes, quienes heredaron los escritos de Marx y Engels, fueron incapaces de apreciar la dialéctica de las matemáticas, la física, y la química. Su comprensión tuvo que esperar hasta que los rusos comenzaron a mostrar la importancia fundamental de la obra filosófica de Marx y Engels. El *Materialismo y Empirio-criticismo* de Lenin (1908) fué un precursor, pero no se conoció fuera de los círculos estrictamente rusos hasta que fué publicado en alemán, mucho después de la revolución de 1917. Posteriormente, los rusos publicaron *La Dialéctica de la Naturaleza* de Engels; primero en ruso, luego en el original alemán (1927).

Ambos libros, el de Lenin y el de Engels están ahora disponibles en inglés, el de Lenin en una traducción de 1927 y el de Engels en una traducción de 1940.

Subsecuentemente, algunos de los más característicos de los manuscritos matemáticos de Marx fueron publicados aunque sólo en una traducción rusa.[7] Nuestro estudio

[6] *Anti-Düring* (Nueva York, 1939), p. 17. (Publicado en español por Ed. Grijalbo).

[7] Marksizm i Estesvoznanie (Moscú: Partisdat, 1933). La traducción rusa de los manuscritos ocupados p. 5-61; es seguida por artículos de E. Kolman, S. Ianovkaia, D. J. Struik, H. J. Muller y otros. El texto original alemán del manuscrito hasta donde yo sé, no ha sido publicado aunque parece haber habido planes; ver "Unterdem *Banner des Marxismus*" (1935), Nº 9, p. 104, n.I. Yo recibí en 1936 una copia a máquina del texto original alemán de los manuscritos matemáticos publicados por el Instituto Marx-Engels de Moscú, y los entrecomillados del presente artículo están traducidos de este texto.

está basado en los escritos publicados por los rusos. Es de esperarse que todos sus cuadernos de matemáticas sean eventualmente publicados, no sólo en ruso sino también en el original alemán.

El grado de interés de Marx en las matemáticas se muestra por el hecho de que el Instituto Marx-Engels-Lenin de Moscú, ha obtenido desde 1925, copias fotográficas de cerca de 900 páginas de manuscritos matemáticos de Marx, todos los cuales han sido descifrados y puestos en orden.[8] Consisten escencialmente en síntesis sobre libros, estudiados por Marx, a menudo con notas; de recuentos comprensivos sobre temas especiales, y de investigaciones independientes, expresando diferentes etapas en los estudios de Marx, desde esbozos preliminares hasta manuscritos terminados preparados [illegible] para beneficio de Engels. Sólo unas cuantas páginas, apenas veinticuatro, estan dedicadas a trabajo de cómputo.

Con mucho, el más voluminoso de estos manuscritos trata sobre álgebra, la cual estudió Marx en Lacroix, Maclaurin y quizá de otros textos. La mayoría de esta álgebra trata sobre la solución de ecuaciones de grados elevados, pero Marx mostró también interés en las series, especialmente en series divergentes. Hay también síntesis que tratan sobre geometría analítica, particularmente de un libro de Hymers.

Otros manuscritos contienen reflexiones de Marx sobre el cálculo diferencial. De nuevo están llenos de resúmenes, y recuentos comprensivos basados en los textos de Lacroix, Boucharlat, y Hind, suplementados por los de Hall y Hemming, todos textos escolares de las primeras décadas del siglo XIX. Este trabajo trata principalmente sobre la concepción de la función y las series, del límite y la derivada, las series de Taylor y Maclaurin y la determinación de máximos y minimos.

[8] La información referente al carácter general de las 900 páginas de los manuscritos matemáticos de Marx está tomada de S. Tanovskaia, "O Matematicheskich Rukopisiakh K. Marksa," p. 136-180. Ver también E. Colman, *Science at the Cross Roads*, (Londres, 1931), p. 233-235.

Marx mostró particular interés en el famoso uso que Lagrange hizo de las series de Taylor para el fundamento "álgebraico" del cálculo, y comparó las diferentes definiciones de la derivada y la diferencial en los diferentes textos. Marx, en una de sus propias notas, reprodujo la derivación del teorema del binomio obtenido del teorema de Taylor, y advierte que "Lagrange, por el contrario, deriva el teorema de Taylor del teorema del binomio", un hecho que repite frecuentemente y al que dedica algunos pensamientos. Uno de sus artículos manuscritos se titula "Un desarrollo algo modificado del teorema de Taylor sobre una base puramente algebráica conforme a Lagrange",[9] otros tienen títulos tan significativos como: "El teorema de Taylor —está basado en la traducción del lenguaje algebráico del teorema del binomio a la expresión de forma diferencial," y "El teorema de Maclaurin es asimismo sólo una traducción del lenguaje algebráico del teorema del binomio al lenguaje de la diferencial." Dos cuadernos de notas, que datan probablemente de un último período de la vida de Marx, contienen ejemplos del método de diferenciación que Marx eventualmente prefirió, así como un escrito sobre la diferencial y un esquema histórico de los métodos de diferenciación usados por Newton, Leibnitz, D'Alembert y Lagrange. Estos cuadernos representan la posición que Marx parece haber adoptado ante Engels. También contienen un largo escrito del cálculo integral, el cual contiene un análisis crítico del *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas*, de Newton. El contenido de su publicación constituye el tema del presente artículo.

Marx estudió cálculo de libros escritos todos ellos bajo la influencia directa de los grandes matemáticos de finales del siglo XVII, y del siglo XVIII, especialmente de Newton, Leibnitz, Euler, D'Alembert, y Lagrange. No estuvo interesado tanto en la técnica de diferenciación e integración, como en los principios básicos sobre los

[9] "Nach Lagrange somewhat modified Entwicklung des Taylorschen Theorems auf bloss algebräischer Grundlage."

[illegible] está cons[illegible] el cálculo, es decir, la manera en que las nociones de la derivada y la diferencial son introducidas. Pronto encontró que existía una considerable diferencia de opinión entre los principales autores en relación a estos principios básicos, una diferencia de opinión frecuentemente acompañada por confusión. Esta sólo crecía en los textos de escuela escritos por autores menores.[10] Diferentes respuestas eran dadas a preguntas tales como que si la derivada está basada en la diferencial o si es lo contrario, si la diferencial es pequeña y constante, pequeña o tiende a cero, o absolutamente cero, etc. Marx sintió el desafío ofrecido por un problema que había atraído algunas [illegible] mentes más agudas del pasado, y que trata sobre el [illegible]ismo del proceso dialéctico, es decir, la naturaleza del [illegible]. No encontrando ninguna respuesta satisfactoria en los libros, trató de obtener una respuesta para sí en su forma característica: yendo a las fuentes, comparando los resultados, y avanzando más allá dentro de nuevas regiones. Debe quizá llamar la atención al lector que entre las fuentes estudiadas por Marx parece no haber referencia a Agustín Cauchy —en todo caso hasta donde podemos juzgar a partir del material publicado. El trabajo de Cauchy, el cuál subraya la exposición del fundamento del cálculo en nuestros textos actuales, pudo haber estado disponible para Marx.[11] La razón de que Marx no se enterara de Cauchy debió ser porque las ideas de Cauchy sólo penetraron lentamente en los textos, así que debieron habérsele escapado a Marx, quien no se movía entre matemáticos profesionales.[12] Una explicación más razonable

[10] Un estudio bueno de las varias teorías está dado por F. Cajori, "Grafting of the Theory of Limits on the Calculus of Leibnitz," ["Implantación de la teoría de límites en el cálculo de Leibnitz] *Am. Math. Monthly*, XXX (1923), 223-34.

[11] A. Cauchy, *Résume des leçons données a l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, (París, 1823.)[Resumen de las lecciones dadas en la Real escuela politécnica sobre el cálculo infinitesimal. N. de T.]

[12] El prefacio a la sexta edición del libro de Boucharlat (1872), el cual Marx consultó, aunque menciona en detalle los trabajos de

es que la manera de definir la derivada por Cauchy era esencialmente la misma de D'Alembert, así que Marx no consideró su método como uno nuevo.

En todo caso, independientemente de las razones de Marx para ignorar el trabajo de Cauchy, su sentimiento de insatisfacción con la forma en que el cálculo era introducido fué compartido por algunos de los principales jóvenes profesionales matemáticos de sus días. En el mismo año (1858) en el cuál Marx reanudó sus estudios matemáticos , Richard Dedekind en Zürich sentía una insatisfacción similar, en su caso mientras enseñaba cálculo. Escribiendo en 1872, estableció primero que en sus lecciones había recurrido a la evidencia geométrica para explicar la noción del límite; después siguió adelante:

"Pero el que esta forma de introducción al cálculo diferencial no pueda pretender ser científico, nadie lo puede negar. Para mí este sentimiento de insatisfacción era tan poderoso que tomé la firme decisión de seguir meditando sobre el asunto hasta que encontrara un fundamento puramente aritmético y perfectamente riguroso para los principios del cálculo infinitesimal."[13]

Esto llevó a Dedekind a un nuevo acercamiento axiomático de la concepción de continuidad y números irracionales, el cual fué uno de los grandes esfuerzos pioneros en lo que llamamos la aritmetización de las matemáticas. Unos años más tarde uno de los otros pioneros de los nuevos métodos de rigor en las matemáticas, Paul Du Bois Reymond, dijo:

"¿Qué matemático negaría que —en su forma publicada— la concepción del límite y sus asociados cercanos, la concepción de ilimitación, de infinitamente grande e infinitamente pequeño, de irracional, etc., carecen todavía de rigor? El maestro en escrito y en palabra, acostumbra apresurar rápidamente este cuestionable

Newton, Leibnitz, D'Alembert y Lagrange, guarda silencio sobre Cauchy. Uno de los libros extensamente usados que explícitamente usó el método de Cauchy fué el de C. Jordan, *Cours d'analyse*, que apareció en 1882.

[13] R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrationalzahlen* (1872). Traducido en "Essays on the Theory of Numbers" [Ensayos sobre teoría de los números] (Chicago, 1901), p. 1 *f*.

ingreso al análisis, para así vagar más confortablemente en los caminos bien iluminados del cálculo."[14]

No fue sino hasta las últimas décadas del siglo XIX, bajo la influencia de Dedekind y Du Bois Reymond, así como de Wierstrass y Cantor que la revisión completa de los principios del cálculo tuvo lugar, la cual subrayaba los métodos modernos, y ha mostrado que el enfoque de Cauchy podía llevar a un rigor completo. Este trabajo apareció demasiado tarde para influir a Marx y a Engels.[15] El resultado es que las reflexiones de Marx sobre los fundamentos del cálculo deben ser apreciados como una crítica a los métodos del siglo XVIII. Creemos, sin embargo, que su obra desarrollada independientemente, pero contemporáneamente, a los principales matemáticos de la segunda mitad del siglo XIX, aún ahora contribuye a entender el significado del cálculo.

Por supuesto, no debemos olvidar que Marx nunca publicó su material, y que no hay siquiera un indicio de que intentará publicarlo, aun cuando Engels parece haber jugado con la idea. Marx, trabajó sobre matemáticas en sus horas libres, para descansar, a veces en horas de enfermedad, guiado por unos libros que encontró o que tenía en su biblioteca, tal y como el de Boucharlat, el cual introduce los principios de diferenciación en una forma insatisfactoria. Para elucidarse, buscó en las fuentes citadas en Boucharlat y libros similares, que lo condujeron a Newton, Leibnitz, D'Alembert y Lagrange. Sus notas fueron en primer lugar, dedicadas para el propósito de estos libros, trató, en su forma característica, de declásicos en intentos por entender los frecuentes textos obscuros. Molesto por las insatisfactorias formulaciones

[14] P. Du Bois Reymond, *Die allgemeine Funktionentheorie*, I [La Teoría General de funciones N. de T.] (1882), p. 2. El autor era hermano del sicólogo Emil, quien compuso el slogan de agnosticismo: "Ignorabimus".

[15] Es dudoso también, si alguna información pertinente sobre el trabajo de los grandes matemáticos alemanes de la segunda mitad del siglo XIX llegara a Marx y Engels. La Inglaterra de sus días era un lugar excelente para estudiar capitalismo, así como física, química y biología, pero estaba atrasada en matemáticas, excepto en algunas ramas especializadas de geometría y álgebra.

de estos libros, trató, en su forma característica, de desenmarañar las dificultades por sí mismo.

Las dificultades que Marx trató de superar son hasta hoy tan reales como en su tiempo, aun cuando nuestro aparato formal está más cuidadosamente elaborado y prácticamente seguro. Estas dificultades son tan viejas como Zenón de Elea y tan nueva como el último intento filosófico o fisiológico para entender cómo el reposo puede convertirse en movimiento y como el movimiento convertirse en reposo. Esta es la razón por la cual Marx estudió tan cuidadosamente la concepción de la derivada de una función y la concepción conexa de la diferencial. Encontró que hay tres métodos básicos por los cuales estas concepciones han sido desarrolladas. Marx los clasificó llamándolos el místico, el racional y el método algebráico (unidos a los nombres de Newton-Leibnitz, D'Alembert y Lagrange respectivamente), y luego le opuso a estos su propio modo de entender la derivada, la diferencial y el cálculo en general. Expliquemos la dificultad al diferenciar la función $y=x^3$ en las distintas formas criticadas por Marx.

1) *Newton-Leibnitz.* ("El cálculo diferencial místico").[16] —x cambia a $x+xt$ en Newton, a $x+dx$ en Leibnitz; nosotros seguimos a Leibnitz. Luego y cambia a $y_1=y+dy$ y $y_1=y+dy=(x+dx)^3=x^3+3x^2dx+3x\ (dx)^2\ +\ (dx)^3$. Como $(dx)^2$ y $(dx)^3$ son infinitesimales comparados con $3x^2dx$, pueden ser descartados, y obtenemos la fórmula correcta.

$$dy=3x^2dx.$$

Esto es sumamente misterioso, y el misterio no desaparece si primero dividimos a dy entre dx

$$dy/dx=3x^2+3xdx+(dx)^2$$

[16] Leibnitz editó su primera publicación sobre el cálculo en 1648, Newton en 1693.

y luego hacemos que $h=dx$ sea cero. Es cierto que obtenemos la fórmula correcta,

$$\frac{o}{o}=\frac{dy}{dx}=3x^2$$

pero como Marx advierte:
"la nulificación de h no está permitida antes de que la primera función derivada, aquí $3x^2$, haya sido liberada del factor h mediante división, de ahí que $(y_1-y)/h=3x^2+3xh+h^2$. Sólo después podemos anular (aufheben) la diferencia finita. El coeficiente diferencial $dy/dx=3x^2$ por lo tanto, originalmente debe ser también desarrollado antes de que podamos obtener el diferencial $dy=3x^2dx$."

En otras palabras, sabíamos por anticipado cuál debería ser la respuesta, y reconstruimos algún razonamiento para hacerla plausible. Era esta vaga forma en la cual Newton y Leibnitz fundamentaron usualmente el cálculo, que llevó a Bichop Berkeley a su famosa crítica en *Los Analistas* de 1734. Aquí preguntaba si las dx son o no cero, llamándolas "fantasmas de las cantidades muertas" y concluía que ningún matemático que creyera estos disparates podría objetar razonablemente, los principios milagrosos de la religión. No ha sido el único caso en el cual las dificultades de fundamento en la ciencia han sido explotadas para razones idealistas y obscurantistas.

Los matemáticos sienten la dificultad y tratan de hacerles frente sugiriendo formas más exactas de fundamentar el cálculo.[17] Las más importantes contribuciones fueron las de D'Alembert y las de Lagrange.

2) *D'Alembert ("El cálculo diferencial racional").*[18] En palabras de Marx:

[17] Ver v.g. G. Cajori, *A History of the Conceptions of Limit and Fluxion in Great Britain from Newton to Woodhouse* ["Una historia de las concepciones de límite y diferencial en Gran Bretaña desde Newton a Woodhouse"]

[18] D.Alembert en "Différentiel" [Diferencial] en la *Encyclopédie* de Diderot (1754).

"D'Alembert empieza directamente desde el punto de partida de Newton y Leibnitz $x_1=x+dx$ pero hace inmediatamente la corrección fundamental $x_1=x+\Delta x$, lo que significa que, Δx se vuelve una indeterminada, pero prima facie incremento finito, el cual llama h. La transformación de esta h o Δx en dx (usaba la notación Leibnitz, como todo francés) es hallada sólo como resultado final de el desarrollo, o por lo menos justo antes de la hora de cierre (knapp von Toreschluss), mientras aparece con los místicos e iniciadores del cálculo como punto de partida:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x_1^3-x^3}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

Ahora, haciendo $h=0$, la expresión $[f(x+h)-f(x)]/h$ cambia a $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{o}{o}=\frac{dy}{dx}=3x^2=f'(x)$$

La forma en que D'Alembert efectúa la diferenciación es muy semejante al método de Cauchy. Hoy día, escribimos con este método.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La objeción de Marx a este método es que, aunque formalmente correcto, la derivada $f'(x)$ está ya presente en $3x^2+3xh+h^2$, es decir, antes de la diferenciación. Es simplemente el primer término de una suma, $3x^2+2xh+h^2$, y el método de D'Alembert solo consiste en idear una forma por medio de la cual pueda uno deshacerse del miembro (o miembros) de la suma que siguen a $3x^2$, Marx llama a esto "Loswicklung" (separación); mientras que el método correcto debería ser "Entwicklung" (desarrollo):
"Por tanto, la derivación es la misma que en Leibnitz y

Newton, pero la derivada ya hecha es, en forma estrictamente algebráica, "separada" de su más amplio contexto.[19] No hay *desarrollo*, sino una separación de la $f'(x)$, aquí $3x^2$,[20] de su factor h y los miembros que aparecen a su lado en los otros miembros, marchando en la milifancia de base.* Lo que realmente ha sido desarrollado es el simbólico lado izquierdo, es decir dx,dy y su relación, el simbólico coeficiente diferencial dy/dx o/o (mejor dicho, en la otra forma $o/o = dy/dx$), el cual a su vez provoca de nuevo algunos estremecimientos metafísicos, si bien el símbolo fué matemáticamente derivado. D'Alembert había dado un enorme paso adelante, al despojar al cálculo diferencial de su vestimenta mística."

La evaluación de Marx sobre el trabajo de D'Alembert como "un enorme paso adelante" todavía permanece. Esto es lo más notable, ya que aún los modernos historiadores de las matemáticas tienen una forma de comentarlo.

3) Lagrange ("El Cálculo diferencial puramente algebráico").

$$y = f(x) = x^3$$

$$y_1 = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2 h + 3xh + h^3$$

Lagrange simplemente define el coeficiente de h como la derivada $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2$, o más generalmente por el teorema de Taylor para una $f(x)$ en general:

$$y_1 = f(x+h) = h(o\, fx) + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2 yh^2}{dx^2\ 2} + \ldots$$

[19] "loegewickelt von ihrem sonstigen Zusammenhang."

[20] "Es ist keine Entwicklung, sondern eine Loswicklung des $f(x)$"

* (...members marching on the rank and file.)

Luego Marx parafrasea el método de Lagrange en las palabras:

En el primer método (1), así como en el racional (2), el coeficiente real requerido es fabricado ya de hecho por el teorema del binomio y puede ser hallado ya, cómo segundo término de la expansión de la serie, y en consecuencia en el término que necesariamente contiene h'. Todo el subsecuente de procedimiento diferencial, sea como en (1) o sea como en (2), es por consiguiente, lujo. Por lo tanto descartemos el lastre inútil. Ya sabemos de una vez por todas, con base a la expansión binomial, que el primer coeficiente real es el factor de h, el segundo el de h^2, etc. Estos coeficientes 'diferenciales' reales no son sino *las funciones derivadas de la función original en x* expandidas binominalmente en sucesión... Todo el problema real se reduce a sí mismo a la búsqueda de métodos (algebráicos) para expandir toda clase de funciones de $x + h$ en potencias integrales ascendentes de h, las cuales en muchos casos no pueden efectuarse sin una gran prolijidad de operaciones.[21] Hasta ahora no aparece nada en Lagrange, sino lo que puede ser hallado directamente del método de D'Alembert (ya que este también incluye todo el desarrollo de los místicos)".

La objeción que Marx levantaba contra los escritores clásicos era que los cuatro tenían la derivada ya preparada, antes de que el proceso de diferenciación comience realmente. Marx quería un método que siguiera actualmente el proceso de variación de la variable y que este proceso definiese por sí solo la derivada como o/o, en cuyo caso puede ser dotada con el nuevo símbolo dy/dx. La derivada, sostenía, debería ser derivada [deducida] mediante un *proceso* de diferenciación, no producida desde el principio por el teorema del binomio.

"Sea que comencemos falsamente desde $x+dx$ o correctamente desde $x+h$, si sustituimos este binomio indeterminado en la función algebráica dada de x, la cambiamos a un binomio de grado definido, v.g. $(x+h)^3$. En luga

[21] Sabemos ahora que a veces no puede hacerse en absoluto, pero esto requiere una extensión de la concepción funcional más allá del horizonte de Lagrange.

de x^3, y esto por un binomio en el cual en un caso dx, y en el otro caso h, figuran como su último miembro. Por lo tanto figura también en la expansión sólo como un factor; con el cual las funciones, derivadas del binomio, son afectadas externamente."[22]

Esta falta de desarrollo interno puede ser evitada en el método que Marx sugiere, digamos para $y=x^3$:

$$y = f(x) = x^3 .$$

$$f(x_1) - f(x) = y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x^1 - x)(x_1^2 + xx_1 + x^2).$$

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = x_1^2 + xx_1 + x^2$$

Cuando $x=x_1$ o $x-x_1=o$, obtenemos:

$$\frac{o}{o} = \frac{dy}{dx} = x^2 + xx + x^2 = 3x^2$$

En este método, escribe Marx, obtenemos primero una "derivada preeliminar", esto es $x^2 + xx_1 + x^2$, y es-to pasa mediante $x = x_1$ en la "derivada definida". Este paso de x_1 a x es eliminado con cualquier aproxima-ción "infinitésimal", y muestra que la derivada es en efec-to o/o. obtenida cuando $x_1 - x$ es actualmente cero:

Aquí vemos en forma sorprendente:

"*En primer término*; para obtener la derivada debemos hacer que $x_1=x$, y por lo tanto de ahí que $x_1 - x = o$ n el *sentido estrictamente matemático*, sin ningun rastro de aproximación infinitésimal únicamente.

En segundo término: Por el hecho de que x_1 ha sido igua-lada a x, y por tanto, $x_1 - x=o$ nada simbólico entra en la "derivada". La cantidad x_1: Originalmente introducida por la variación de x, no desaparece; es sólo *reducida* a su límite mínimo x. Queda un elemento introducido como nuevo en la función original, el cual por su combinación en parte consigo mismo, en parte con la x de la función original, al final produce la "derivada", es decir la "deriva-

22 "nur als Faktor, womit die durch das Binom aggeleiteten Funktionen ausserlich behaftet sind."

da" preliminar reducida a su valor mínimo.

...El accidente simbólico o trascendental ($o/o = dx/dy = 3x^2$) ocurre sólo en el lado izquierdo, pero ya ha perdido su terror, puesto que aparece ahora, únicamente como la expresión de un proceso que ya ha mostrado su contenido real en el lado derecho de la ecuación."[23]

En el momento en que $x^1=x$ el cociente $\Delta y/\Delta x$ se convierte en o/o. Ya que en la expresión o/o toda sombra de su origen y de su significado ha desaparecido, ésta es remplazada por el símbolo dy/dx, en el cual las diferencias finitas Δy y Δx aparecen en forma simbólica como diferencias *liquidadas* (aufgehobene) o *desvanecidas* (verschwundene). En este momento el álgebra desaparece y comienza el cálculo diferencial, que opera con los símbolos dy/dx.

A fin de entender mejor las intenciones de Marx, traducimos aquí parte de la carta que Engels le escribió en Agosto 18 de 1881, después de haber leido el manuscrito de Marx:

"Cuando decimos que en $y=f(x)$ la x y y son variables, esto es entonces mientras no prosigamos una pretensión fuera de toda consecuencia adicional, y x y y son todavía, pro tempore, constantes de hecho. Sólo cuando realmente cambian, es decir *dentro de la función*, se convierten en variables de hecho. Sólo en ese caso es posible para la relación —no de ambas cantidades como tales sino de su variabilidad— la cual permanece oculta en la ecuación original, revelarse por sí misma. La primera derivada $\Delta y/\Delta x$ muestra esta relación tal como ocurre en el curso del cambio real, es decir en todo cambio *dado*; la derivada final dy/dx lo muestra puro, en su generalidad. Por tanto podemos ir de dy/dx a cualquier $\Delta y/\Delta x$, mientras que esta ($\Delta y/\Delta x$), por sí misma sólo cubre el caso especial. Sin embargo, para pasar del caso especial a la relación general, el caso especial debe ser liquidado

23 "Das transzendentale oder symbolische Unglük ereignet sich nur auf der linken Seite, hat aber seinen Schrecken bereits verloren, da es nun als Ausdruck eines Prozesses erscheint, der seinen wirklichen Gehalt be reits auf der recten Seite der Gleichung bewährt hat."

como tal (als solcher aufgehoben werden). Por tanto, después de que la función ha pasado a través del proceso de x a x' con todas sus consecuencias, x' puede tranquilamente dejarse convertir en x nuevamente, no es ya la antigua x, que sólo era variable de nombre, ha pasado a través de un *cambio real*, y el *resultado* del cambio permanece, aún si lo liquidamos de nuevo en sí mismo (auch wenn wir sie selbst wieder aufheben).

Claramente vemos aquí por fin, lo que muchos matemáticos han reclamado por largo tiempo, sin haber sido capaces de presentar explicaciones racionales para esto, que la *derivada* es la original, las diferenciales dx y dy son derivadas."

La diferencia entre el método de Marx y el de D'Alembert (y también el de Cauchy) no debe ser malentendida y rechazada como trivial o insignificante *(x'-x=h versus x'=x+h).* Marx, como yo lo veo, estaba perfectamente satisfecho de que el método de D'Alembert es formalmente correcto. Sin embargo, el quería llegar a un entendimiento del proceso mismo de diferenciación. ¿Es la derivada obtenida al permitir pasar x(y y) por una secuencia de valores constantes, o es necesario dejar que y (y y) cambien realmente? Entendida así, vemos la vieja "paradoja" de Zenón emergiendo: ¿puede el movimiento de un punto ser obtenido siguiendo una secuencia de posiciones de este punto en reposo? Zenón mostró que una secuencia de tales posiciones nunca producirán movimiento; también mostró mediante un razonamiento similar que Aquiles nunca alcanzaría la tortuga. D'Alembert, sostenía Marx, representa una forma de pensamiento que no hace justicia al evento actual que ocurre cuando una función es diferenciada. Lo que ocurre es un cambio real, y esto se entiende mejor cuando escribimos primero $\Delta y/\Delta x$ como una función de x y una x' enteramente nueva, y luego hacemos a x=x'. Además, h=x'-x no sólo se *aproxima* a cero, h se convierte en *cero*. El énfasis está puesto en el hecho de que la derivada sólo aparece cuando ambas, Δy y Δx, son cero absolutamente. Esto nunca se hizo claro con los "místicos" Leibnitz-Newton, y apareció como una cosa accidental en D'Alembert-Lagrange.[24] Es tan poco entendido que en algunos textos populares, tales como el de *"Mathematics for the Million"* [*Matemáticas para el Millón*] de Hogben, se da la impresión de que el proceso de diferenciación es sólo aproximadamente cierto. Pero aún en nuestros textos modernos, aunque usan un aparato formal que es impecable, parte del pensamiento subyacente tras el aparato no queda totalmente clarificado.

Tomemos como un ejemplo, el texto de *Pure Mathematics"* [*Matemáticas Puras*] de G. H. Hardy, quien es uno de los grandes matemáticos vivientes. La derivada se explica en la forma de Cauchy-D'Alembert:

$$\phi'(x) = \lim_{h \to o} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$$

la cual significa que $\phi(x + h) - \phi(x)/h$ tiende a un límite cuando h tiende a cero. ¿Qué significa esto? Se nos dice que ϕ *(y)* tiende al límite ℓ, si y tiende a cero, siempre y cuando cualquier número positivo δ, por pequeño que sea, es asignado, podemos escoger y_o (δ) de forma tal que $\phi(y)$ - $\ell/<\delta$ cuando $0<y<y_o(\delta)$.[25]

Esta definición es exacta, en el sentido de que tenemos un sutil y correcto criterio para probar cualquier límite. Pero ϕ *(y)* siempre ronda cerca del límite, ya que nos dice que y "tiende" a cero. Similarmente, $\phi'(x)$ está definido por medio de una h que siempre "tiende" a cero. La cuestión es si el evento de que h=0 es alguna vez alcanzado. Marx no sólo lo afirmó, sino que lo enfatizó. La definición usual de los textos modernos no considera esta pregunta seriamente, porque la satisfacen con un criterio pragmático que nos permite reconocer un límite

[24] Más información en F. Cajori, "The History of Zenon's Arguments on Motion." [La historia de los argumentos sobre el movimiento de Zenón] vi, *Am. Math. Monthly* XXII (1915), p. 143-149.

[25] G. H. Hardy, *Pure Mathematic* (Cambridge University Press, 6th ed., 1933) esp. p. 116, 198. Esta definición es válida cuando y tiende a cero desde un valor positivo. En forma similar una definición de límite puede ser obtenida cuando y tiende a cero desde valores negativos.

cuando éste aparece.[26]

El resultado es que gran parte de la enseñanza de los elementos del cálculo procede de la siguiente manera —y lo confieso en mi propio caso, en mi manera de enseñar. Primero, se muestra que un límite puede aproximarse tan cerca como uno quiera, pero nunca se alcanza. Luego la derivada se define con la ayuda de este concepto de límite. Y luego de pronto comenzamos a trabajar con esta derivada, la cual nunca podría ser alcanzada (como anteriormente lo hemos demostrado), como si realmente hubiese sido alcanzada. El caso $h=o$, $x'=x$, aunque presente en el aparato formal, es de algún modo obscurecido en el razonamiento. Una excepción se encuentra en el trabajo de Mortiz Pasch, quien en su muy cuidadoso análisis de la derivada desarrolla un aparato formal en el cual hay pleno espacio para el caso $h=o$.[27]

Marx por consiguiente pertenecía a aquella escuela de pensadores que insisten en la mayor claridad de pensamiento al interpretar un aparato formal. Su posición contrasta profundamente con la de aquellos matemáticos o físicos matemáticos que creen que el aparato formal es lo único que importa. La posición de Marx era la del materialista, quien insistía que las matemáticas significativas deben reflejar operaciones en el mundo real.

Es interesante saber que las diferencias entre los aparatos formales de Marx y D'Alembert decrece cuando consideramos funciones más complicadas. Para el caso $y=$ sen x la derivada, en la forma de diferenciación de D'Alembert, todavía es obtenida por separación (loswicklung), pero para $y=log\ x$ la derivada sólo puede ser obtenida de $\Delta x/\Delta x$ dejando a h pasar a través de un cambio real.

[26] Ver v.g. F. Cajori, *Am.Math. Monthly*. XXII (1915), p. 149. en relación a las variables que alcanzan sus límites: "En teoria moderna no es particularmente una cuestión de argumento, sino más bien de suposición. La variable alcanza su límite si deseamos que debe hacerlo; y no alcanza su límite, si deseamos que no debe." Tal raciocinio parece llevar a la conclusión de que depende de nuestra voluntad el si Aquiles alcanzará o no a la tortuga.

[27] M. Pasch, "Der Begriff des Differentials" en *Mathematik am Ursprung* (Leipzig, 1927), p. 46-73, esp. p. 61, 68. ["El concepto de las diferenciales" en Matemáticas básicas].

Tan pronto como dy/dx es establecida como el resultado de un cambio real, el mismo se convierte en tema de un cálculo, el cálculo diferencial. Marx en un manuscrito sobre el significado de la diferencial, derivó como una de las fórmulas de este cálculo, que la derivada de $y=uz$, donde u y z son funciones de x, está dada por

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

Cuando $uz=f(x)$, entonces dy/dx puede ser escrita como $f'(x)$, "y la $f'(x)$ permanece opuesta a dy/dx como su propia expresión simbólica, como su doble o equivalente simbólico."

"El coeficiente diferencial simbólico se ha convertido en un *punto de partida independiente*, cuyo equivalente real ha de ser hallado primero. La iniciativa ha sido movida del polo derecho, el algebráico (en $dy/dx = f'(x)$) al izquierdo, el simbólico. Con esto, sin embargo, el cálculo diferencial aparece también como una clase específica de computación, operando ya independientemente sobre su propio terreno. Sus puntos de partida du/dx dz/dx son cantidades matemáticas que pertenecen exclusivamente a este cálculo y lo caracterizan. Y esta reversión (umschlag) del método resultó aquí de la diferenciación algebráica de uz. El método algebráico se convierte automáticamente en su opuesto, el método diferencial.

Ahora, removiendo en la ecuación (a), $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} +$ el común denominador dx, obtenemos (b), d(uz)=dy= udz+ zdu, en el que toda huella de su origen de (a), ha sido eliminada.

(b) es por tanto válida en el caso en que u y z dependan de x, así como también en el caso en que sólo dependan entre sí, sin ninguna relación con x. Es desde el principio una ecuación simbólica, y puede servir desde el principio como una ecuación operacional simbólica."

La diferencial es por lo tanto una forma simbólica —deberíamos decir una forma operacional— $dy=f'(x)dx$ aparece como solamente otra forma de $dy/dx=f'(x)$.

y es siempre convertible a la forma diferencial. Los matemáticos modernos, no tendrían faltas que encontrar con este método, y especialmente V. Glivenko ha mostrado[28] como Hadamard, el matemático francés, ha enfatizado el carácter operacional de la diferencial. Sin embargo, Marx no mencionó, la común interpretación actual de que dy debería ser $f'(x)\Delta x$, obtenida al fijar arbitrariamente $dx=\Delta x$. Esta forma de representar dx, la cual data ya desde Cauchy, pudo habérsele escapado a Marx (él, criticó a Boucharlat por su introducción a la diferencial, pero el método de Boucharlat es ya anticuado). Sin embargo, creemos que Marx en todo caso ha objetado a esta ecuación $dx=\Delta x$, la cual establece una identidad entre dos concepciones con un significado operacional enteramente diferente. La interpretación de dy por Cauchy, la cual ha encontrado su lugar en todos nuestros textos, es mecánica y sólo puede ser justificada mediante el uso para el cual, la fórmula $dy=f'(x)$ dx puede ser empleada como una aproximación para ciertos cambios de una constante x en una constante $x+\Delta x$[29]. Y el hecho de que esta diferencia entre dx y Δx, dy y Δy puede ser adecuadamente representada en una figura no habría impresionado a Marx y Engels, cuyos intereses estaban en la relación aritmética-algebráica de los símbolos del cálculo, con el proceso real del cambio. Esto puede ser ilustrado a partir de la siguiente correspondencia entre Marx y Engels después de que Sam Moore había escrito su opinión sobre el material manuscrito de Marx:

"Incluyo primero un intento matemático por parte de Moore. El resultado de que "el método algebráico es sólo el método diferencial disfrazado" se refiere por

[28] V. Glivenko, "Der Differentialbergrieff bei Marx und Hadamard" *Unter dem Banner des Marxismus* (1935) no. 9, p. 102-110; texto ruso en "Pod Zna menem Marksizma", 1934, no. 5. Veer J. Hadamard *Cours d'analyse*, I (París, 1972), p. 2 y 6.

[29] Comparar C. de la Valle Poussin, *"Cours d'analyse infinitésimale"*, I (Louvain, Paris, 1923), p. 52. "Para la sustitución de dx por Δx en la ecuación $df(x) = f'(x)\Delta x$ no hay necesidad, pero es justificada por costumbre y esta costumbre es justificada."

supuesto sólo a su propio método de construcción geométrica y es también relativamente correcto. Yo le he escrito que no te interesabas sobre la forma en que el asunto es representado en la construcción geométrica, la aplicación de las curvas a la ecuación es de hecho suficiente (reiche ja hin). Además, la diferencia fundamental entre tu y el viejo método, es que tú haces cambiar x en x', haciéndolas por lo tanto variar realmente, mientras que el otra parte de $x+h$, lo cual es siempre, sólo la suma de dos cantidades, pero nunca la variación de una cantidad. Tu x en consecuencia, aún cuando ha pasado por x' y ha llegado a ser x de nuevo, es empero diferente de la que era antes; mientras que x permanece constante durante todo el período en el cual h es, primero, sumada a x y posteriormente sustraída de nuevo. No obstante cada representación gráfica de la variación es necesariamente la representación gráfica del proceso *pasado* del *resultado*, y por lo tanto de una cantidad que se hizo constante, la línea x; su complemento es representado como x+ h, dos segmentos de una línea. De esto se sigue ya que una representación gráfica de cómo x se vuelve x' y x' se vuelve de nuevo x, es imposible." (Engels a Marx, Noviembre 21 de 1882).[30]

Al día siguiente, siguió la respuesta de Marx:

"Sam, como lo has visto de inmediato, critica el método analítico que yo he usado simplemente dejándolo de lado y ocupándose en su lugar con la aplicación geométrica, a la cual yo no dediqué una sola palabra.

Puedo de la misma forma deshacerme (könnte damit abspeisen) del propio, así llamado método diferencial —comenzando con el método místico de Newton y Leibnitz, luego continuando con el método racionalista de D'Alembert y Euler, y terminando con el método estrictamente algebráico de Lagrange (quien sin embargo siempre parte del mismo principio original de Newton-Leibnitz)— podría deshacerme de todo este desarrollo histórico del análisis diciendo que *prácticamente* nada esencial ha cambiado en la aplicación geométrica del cálculo diferencial, es

[30] Las palabras entrecomilladas están en inglés en la carta —ver Marx-Engels Gesamtausgabe, Abt. III, Bd. II, p. 571.

decir, en la representación geométrica (Versinnlichung)."[31]

Esta última observación de Marx muestra afinidad con la de Dedekind, quien también se esforzó por construir el cálculo independientemente de la representación geométrica de la derivada. Podemos considerar esto como una de las características del análisis de Marx, en lo cual concuerda con nuestro enfoque moderno. Otro importante rasgo fue su insistencia en el carácter operacional de la diferencial y su búsqueda por el momento exacto en el que el cálculo surge del álgebra subyacente como una nueva doctrina. Los "infinitésimales" no aparecen en absoluto en el trabajo de Marx. En su insistencia sobre el origen de la derivada en un cambio real de la variable, toma un paso decisivo en superar la antigua paradoja de Zenón —al enfatizar la tarea de los científicos de no negar las contradicciones en el mundo real sino de establecer la mejor manera en la cual puedan existir lado a lado.[32] Aquí su posición es directamente opusta a la tomada por Du Bois Reymond, quien pensó que los incrementos *dx*, *dy* debían ser tomados como entes en reposo, invariables,[33] o a la de Tarski, moderno matemático, que niega totalmente la existencia de cantidades variables.[34] La posición de Marx al respecto sería apreciada por muchos matemáticos.

Creemos que este panorama general de las opiniones de Marx sobre el origen del cálculo demuestra que la

[31] *Marx-Engels Gesamtausgabe*, Abt. III, Bd. IV, p. 572. Comparar Marx, "Capital", parte I, cap. 3, sección 2: "La metamorfósis de las mercancías," (Traducción inglesa, ed. 1889, p. 76).

[32] Du Bois Reymond, op. cit., p. 141, plantea su aversión por la concepción de dx como una "quantité évanquissante," [cantidad desvanecida] ya que desaprueba (*geht mir entschieden wider den Mann*) cantidades que empiezan a moverse sólo cuando miramos las fórmulas: "Mientras el libro está cerrado, prevalece un profundo descanso. Tan pronto como lo abrimos, comienza la carrera hacia a cero de todas las cantidades provistas con la d." Marx, sin llegar a la conclusión de Du Bois Reymond, podría haber compartido su crítica, ya que él quería expresar no solo un cambio en el papel, sino un cambio en la realidad.

[33] A. Tarski, *Introduction to Logic*. ["Introucción a la Lógica"] (New York, 1941), p. 4.

publicación de sus demás manuscritos es, también, deseable.

Instituto Tecnológico de Massachusetts. (1948)

Lo que está entre corchetes son notas del traductor.

DE LOS «MANUSCRITOS MATEMÁTICOS» DE K. MARX

PRESENTACIÓN DE LUCIO LOMBARDO RADICE

El ensayo que publicamos fue escrito por Marx para Engels («para el General», leemos en el manuscrito, y «General» era uno de los apodos familiares de Friedrich Engels en casa de Marx); escrito en 1881, Engels lo leyó el 17 de agosto de aquel año. «Ayer me armé de valor y decidí estudiar tus manuscritos matemáticos incluso sin ayuda de libros; pude comprender con alegría que no los necesitaba» (Engels a Marx en Londres, el 18 de agosto de 1881).

Engels no necesitó libros, el lector no necesitará muchos comentarios; el texto es tan evidente, «la cosa es tan clara como la luz del sol» (Engels, carta citada), que constituiría realmente un «insulto pedantesco», para utilizar una expresión de Galileo, interponer entre el lector y el límpido texto marxiano las sombras de las minuciosas precisiones históricas y técnicas, que tienen en cambio su cabida en la edición crítica de la que hemos sacado el texto alemán (publicado por vez primera en K. MARX *Matematičeskie rukopisi* [Manuscritos matemáticos] de 1968 en Moscú por el Instituto para el marxismo-leninismo del CC del PCUS [*Izdatel'stvo «Nauk». Glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj literatury*]; una traducción rusa, incompleta, ya había aparecido en 1933 en al antología *Marxismo y ciencias naturales*, editada en Moscú).

Por dicho motivo, nos limitamos a un breve comentario matemático, seguido de un comentario filosófico no menos breve (el problema investigado, y resultado, por Marx, hace referencia a los *fundamentos* del cálculo infinitesimal, es decir, es filosófico).

Marx niega una existencia matemática primaria (no reflejada) a las diferenciales dx y dy, es decir, niega la existencia de infinitésimos actulales, de cantidades infinitamente pequeñas, pero no nulas. Analiza el proceso del paso de una función $y = f(x)$ a su derivada. Lo analiza desde el punto de vista *operativo*. Como primera cosa, decide construir la relación incremental, es decir, la relación entre el incremento $f(x_1) - f(x)$ de la función y el $x_1 - x$ de la variable independiente; así se obtiene una función, digamos $F(x,x_1)$, que Marx denomina *derivada provisional*. Mientras los incrementos son finitos, existe una igualdad entre la relación incremental y la derivada provisional (entre el primero y el segundo miembro). Cuando, al contrario, x_1 varía, volviendo al valor x inicial, mientras en el segundo miembro tenemos una normalísima transformación algebraica, en cuanto $F(x,x_1)$ se convierte en $F(x,x)$ (y, en los casos elementales tratados por Marx, $F(x,x_1)$, como función de x_1 está perfectamente definida para x_1 igual a x), en el primer miembro la relación incremental pierde un significado operatorio efectivo, en cuanto se convierte en la relación $\frac{0}{0}$. Dicha relación, que juntamente con Leibniz escribimos como «cociente diferencial» $\frac{dy}{dx}$, no es para Marx, entonces, otra cosa que el símbolo de la operación «algebraica» realizada efectivamente en el segundo miembro: carece de existencia propia. Son «figuras de sombra sin cuerpo», «llegadas al mundo con una sola cara» *(einseitig)* «réplicas-en-préstamo *(Doppelgänger)* simbólicas»[1] del proceso real de paso de una *función: originaria*, $f(x)$, a su «*derivada definitiva*», $f'(x)$, proceso que se desarrolla enteramente en el segundo miembro.

En el manuscrito traducido anteriormente, Marx ofrece cuatro ejemplos. En el primero, el de la y proporcional a la x, $y = ax$ (Marx, sin embargo, considera aparte el caso $a = 1$), no figuran x y x_1 en la «*derivada provisional*», en cuanto la relación incremencial es constante, igual a a; en este primer caso, el más sencillo, se observan dos peculiaridades: 1) la relación incremencial coincide con su límite (con la relación de las diferenciales); 2) el procedimiento de derivación se interrumpe después del primer paso, porque ya no es aplicable a la derivada (o, puestos a ser pedantes, sigue siendo aplicable pero con resultado cero). Marx considera a continuación el caso de una función polinomial (caso algebraico en sentido estricto, de grado mayor a uno; en tal caso, en el incremento de la función puede ponerse fácilmente en evidencia el factor $x - x_1$ pasando a la relación incremental aparece, pues, inmediatamente una función $F(x,x_1)$ definida para $x = x_1$; el procedimiento algebraico que se desarrolla en el segundo miembro adquiere toda su riqueza, sin dejar de ser muy simple técnicamente. Marx se ocupa finalmente de una función «trascendente», la función exponencial $y = a^x$, y comprueba que un procedimiento «algebraico» (en este caso, el comentarista pedante preferirá decir hoy «analítico») sigue siendo posible. Hemos omitido el cuarto ejemplo aducido por Marx *nachträglich* (en un «anexo»), el de «un caso en el que el factor $x_1 - x$ no pueda ser extraído *directamente* de la primera ecuación en las diferencias [finitas], [que conduce] a la "derivada provisional"».

1. Son palabras de Marx en otro manuscrito matemático, *Über das differential* (ob. cit., pág. 54, passim).

El caso tratado por Marx en el anexo es el de la función: $y = \sqrt{a^2 + x^2}$, con el radical entendido en sentido aritmético (positivo).

Pero, repitámoslo, no creemos que merezca la pena detenernos en los desarrollos estrictamente matemáticos, y mucho menos en el desconocimiento de Marx de la fundación crítica del análisis, de Cauchy a Weierstrass (ese límite, por otra parte, pone de relieve la genialidad de Marx, que lleva de manera autónoma a criticar, constructivamente, la fundación «mística» del cálculo infinitesimal). Cuando, el 21 de noviembre de 1882, Engels envía a Marx un «intento matemático» del amigo común Samuel Moore, Marx responde (el día siguiente) a la observación de Moore, según el cual «*the algebraic method is only the differential method disguised*», explicando que él podría enfrentar a este modo todo el «desarrollo histórico del análisis diciendo que *en la práctica* nada ha cambiado sustancialmente en la aplicación geométrica del cálculo diferencial [...]».

Repitamos también que se trata de un problema referente a los *fundamentos* del cálculo diferencial, considerado en su desarrollo histórico.

> «partiendo del método místico de Newton y de Leibniz, pasando luego al método racionalista de D'Alembert y de Euler y concluyendo con el método rigurosamente algebraico de Lagrange (que, sin embargo, parte de la misma concepción originaria fundamental de Newton-Leibniz)».

Hemos citado otro fragmento de la carta de Marx a Engels del 22 de noviembre de 1882, fragmento que hoy nos viene explicado por la publicación en el volumen de los *Manuscritos matemáticos* de las extensas notas de Marx sobre el «curso del desarrollo histórico» del cálculo infinitesimal. No pretendemos gravar aquí el comentario ilustrando las diferentes fases enumeradas por Marx en la carta a Engels. Nos limitamos a las primeras líneas del escrito, en las que aparece claramente por qué Marx habla, a propósito de Newton-Leibniz (sin establecer diferencias, como suele hacer Engels, entre los dos a favor del dialéctico Leibniz contra el empirista Newton), de «cálculo diferencial místico». «$x_1 = x + \Delta x$ aparece transformado desde el principio en $x_1 = x + dx$ [...] donde dx es presupuesto [dado] mediante una *definición* metafísica. Primero existe, y después se le define».

Marx invierte la fundación: derivadas y diferenciales no son entidades («sustancias» de tipo metafísico) existentes en sí mismas, sino *símbolos de operaciones*, y por consiguiente son definidas *operatoriamente*. No hay duda de que la posición de Marx se sitúa en el gran camino del pensamiento moderno (Albert Einstein, Norbert Wiener) de la *definición operativa;* de que, en concreto, en el caso de una función polinómica el «método algebraico» de Marx abre paso a desarrollos matemáticos importantes (en cuyos *contenidos* está claro que Marx no podía pensar), es decir, a una definición operativo-formal de la derivada de una función polinómica con coeficiente en un campo cualquiera, definición totalmente independiente de las consideraciones de continuidad y de límite que caracterizan a las funciones de variables reales. No hay duda, en general, de que Marx dedica tanta atención y tanto esfuerzo de su pensamiento en los últimos años de su vida a la fundación del cálculo infinitesimal, porque encuentra en él un argumento decisivo contra una interpertación metafísico-mística de la ley dialéctica de la negación de la negación.

Quisiera detenerme un momento sobre este núcleo filosófico de las reflexiones matemáticas de Marx. Más exactamente, quisiera formular algunas consideraciones sobre la nueva luz que los *Manuscritos matemáticos* de Marx (me refiero a los referentes a la fundación del cálculo diferencial), lanzan sobre las *concordancias* y sobre las *diferencias* existentes de hecho entre el pensamiento

de Karl Marx y el de Friedrich Engels, referentes a la dialéctica de la naturaleza y a la dialéctica de las ciencias naturales y exactas.

Creo que aparece inmediatamente una confirmación del hecho de que Marx no limitaba la dialéctica a la historia humana, que, al igual que Engels, estaba convencido del hecho de que los procesos naturales y las ciencias que los reflejan (o mejor dicho, los «imitan») tienen su dialéctica propia, y que entre ambas dialécticas, la histórico-humana y la histórico-natural, existe una relación muy estrecha. Ya he tratado en otras ocasiones este tema (por ejemplo, en la Introducción a la edición de 1967 de la *Dialéctica de la naturaleza* de Engels); la contraposición Marx-Engels sobre este terreno como contraposición diametral me parece totalmente liquidada por los recientes estudios italianos sobre Engels (me refiero a los *Saggi sul materialismo*[2] de Sebastiano Timpanaro jr., *Engels e il materialismo dialettico* de Eleonora Fiorani, y sobre todo al capítulo sobre «Engels e la dialettica della natura» que ocupa una posición central en el quinto volumen de la gran *Storia del pensiero filosofico e scientifico* de Ludovico Geymonat).

Al mismo tiempo, se precisa y aclara una cierta diferencia (con sus «variaciones» que no permiten ninguna esquematización) entre la concepción que tuvieron de la dialéctica de la naturaleza Marx y Engels; mejor dicho, admitiendo la inseparabilidad de una dialéctica de la naturaleza de una concepción dialéctica *general*, una cierta diferencia entre Marx y Engels en concebir el proceso de «negación de la negación».

En la página del *Anti-Dühring* dedicada a la relación diferencial (a la derivada) me parece que Engels sigue el camino, que Marx rechaza en principio, de la negación de la negación, como un mero poner y luego quitar.

2. Traducción al castellano: *Praxis, materialismo y estructuralismo*, Libros de Confrontación, Filosofía 4, Ed. Fontanella, Barcelona, 1973.

«En las fórmulas o ecuaciones que encuentro, yo pongo en lugar de x e y su negación, dx y dy. Sigo calculando con esas fórmulas, trato dx y dy como magnitudes reales, aunque sometidas a ciertas leyes excepcionales, y en determinado momento *niego la negación*, es decir, integro la fórmula diferencial, en lugar de dx y dy obtengo de nuevo las magnitudes reales x e y, pero ya no me encuentro en el mismo punto donde estaba al principio; al contrario, consigo resolver de este modo un problema sobre el cual la geometría y el álgebra se han esforzado inútilmente.»

El discurso de Engels es aquí fundamentalmente *asertorio;* dado que el proceso diferencial no queda esclarecido, se tiene la impresión de una dialéctica que sigue colocada en la mente, todavía «mística». Cabe objetar, y pienso que con razón, que el *Anti-Dühring* aparece en 1877-78; que Engels, después del descubrimiento de Marx de 1881, habría escrito de manera distinta estas páginas. Sin embargo, aún aceptando como buena la tesis (que exigiría alguna verificación) de una *total* comprensión por parte de Engels de la «demistificación» de las diferenciales operada por Marx (convendría, por ejemplo, leer más de una vez con rigor filológico y filosófico la reinterpretación que da Engels del escrito de Marx que se publica en la citada carta del 18 de agosto), queda abierto el problema de una, o varias «oscilaciones» de Engels, incluso después de 1881, en relación a la concepción dialéctico-operativa («método algebraico de Marx») del diferencial.

En mi opinión, se trata de dos oscilaciones en sentido opuesto. En primer lugar, perdura en Engels la tendencia a afirmar que «*rectilíneo* y *curvilíneo*» aparecen equiparados en última instancia en el cálculo diferencial» (*Dialéctica de la naturaleza*, ed. citada, pág. 226):

«Allí donde termina sobre poco más o menos la matemática de lo recto y lo curvo, se abre una nueva trayectoria, casi infinita, con la matemática que *concibe lo curvo como recto* (triángulo diferencial) *y lo recto como curvo* (curva de primer grado, con una curvatura infinitamente pequeña). ¡Oh, metafísica!» (*ibid*, págs. 226-227).

En suma, mientras Marx negaba decididamente, como pura «quimera», la idea de un infinitesimal, digamos, intermedio entre el 0 y lo finito, y afirmaba «brutalmente» que una diferencia es finita o nada, Engels sigue vinculado a la idea de un «*infinitesimo non quanto*» (como decía Galileo) *y al mismo tiempo no nulo*, no consigue alejarse completamente de la concepción «mística» de Leibniz. Y, en el extremo opuesto, existe un intento, por otra parte muy interesante, de Engels (en especial en un extenso fragmento escrito probablemente para el *Anti-Dühring;* véase *Dialéctica de la naturaleza*, ed. citada, pág. 229 y siguientes) de ofrecer una interpretación naturalista del diferencial, comparando el infinitésimo matemático a lo indivisible físico, la diferencial a las moléculas y a los átomos.

«El misterio que todavía rodea a las magnitudes que se manejan en el cálculo infinitesimal —a las diferenciales y a los infinitos de diversos grados— constituye la mejor prueba de que se sigue creyendo que se está, en este terreno, ante puras "creaciones e imaginaciones libres" del espíritu humano, para las que no se encuentra equivalencia alguna en el mundo objetivo. Pero lo que en realidad ocurre es lo contrario. Todas estas magnitudes imaginarias tienen su modelo en la naturaleza (...) la naturaleza opera con estas diferenciales, con las moléculas, exactamente del mismo modo y con arreglo a las mismas leyes que las matemáticas con sus diferenciales abstractos.»

Fe de Erratas

MANUSCRITOS MATEMATICOS

p.7 en renglón 18 dice:

.... para luego observarlo en 1878 y estudiar ....

debe decir: para luego observarlo en 1878 estudiar

p.10 en renglón 14 dice:

.... pero de paso le habría servido ....

debe decir: pero de poco le habría servido

p.10 en renglón 27 dice:

.... Hay en Marx otro dilema ....

debe decir: Hay en Marx otra diversa

p.11 en renglón 9 dice:

.... resolución ejemplar pues a la fundamentación ....

debe decir: resolución ejemplar pues allí a la fundamentación

p.12 en renglones 4 y 5 dice:

.... incluso éste último no mantiene el principio místico ....

debe decir: incluso éste último mantiene el principio místico

p.12 en renglón 19 dice:

.... ofrece una D idéntica ....

debe decir: ofrece una D inidéntica

p.18 último renglón dice:

.... $\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X}$ ó $\frac{Y}{X} = 1$ ....

debe decir: $\frac{Y_1 - Y}{X_1 - X}$ ó $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 1$

p.42 en renglón 21 dice:

.... $y_1 = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh + h^3$

debe decir: $y_1 = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$